

37

CIENCIAS
EXPERIMENTALES Y
TECNOLOGÍA



Servicio
de
Publicaciones

Alessandra Gallinari

APUNTES Y PROBLEMAS
DE
LÓGICA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS

APUNTES Y PROBLEMAS DE LÓGICA MATEMÁTICA

APUNTES Y PROBLEMAS DE LÓGICA MATEMÁTICA

Alessandra Gallinari



Universidad
Rey Juan Carlos

Dykinson, S.L.

Todos los derechos reservados. Ni la totalidad ni parte de este libro, incluido el diseño de la cubierta, puede reproducirse o transmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Dirijase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

© Copyright by
Alessandra Gallinari
Madrid, 2009

Editorial DYKINSON, S.L. Meléndez Valdés, 61 - 28015 Madrid
Teléfono (+34) 91 544 28 46 - (+34) 91 544 28 69
e-mail: info@dykinson.com
<http://www.dykinson.es>
<http://www.dykinson.com>

Consejo Editorial véase www.dykinson.com/quienessomos

ISBN: 978-84-9849-475-4

Preimpresión realizada por la autora

Índice General

1	Prólogo	5
2	Introducción	11
2.1	El lenguaje de la lógica	11
2.1.1	Estructura del lenguaje formal	12
2.1.2	Niveles de la lógica formal	14
2.2	Resumen de la historia de la lógica	15
2.2.1	Lógica y filosofía	16
2.2.2	Lógica y matemáticas	16
2.2.3	Lógica e informática	17
3	Algunas nociones de teoría de conjuntos, relaciones y funciones	19
3.1	Nociones de teoría de conjuntos	20
3.1.1	Inclusión e igualdad de conjuntos	21
3.1.2	Operaciones con conjuntos	22
3.1.3	Partes de un conjunto y propiedades de las operaciones con conjuntos	23
3.1.4	Cardinal de un conjunto	24
3.2	Relaciones binarias	25
3.2.1	Relaciones de equivalencia	26
3.3	Relaciones n -arias	27
3.4	Funciones	27
3.5	Ejercicios propuestos	30
I	Lógica de proposiciones	33
4	Sintaxis de la lógica proposicional	35
4.1	Alfabeto del lenguaje formal de la lógica proposicional	36
4.2	Definición recursiva de las expresiones bien construidas: fórmulas	37
4.2.1	El principio de inducción estructural para fórmulas pro- posicionales (demostración de propiedades)	39
4.3	Representación de las fórmulas bien construidas	41

4.3.1	Fórmulas en forma usual y abreviada	41
4.3.2	Fórmulas en forma de árbol estructural	42
4.3.3	El principio de recursión estructural para fórmulas pro- posicionales (definición de funciones)	45
4.4	Formalización del lenguaje natural	46
4.5	Ejercicios propuestos	49
5	Semántica de la lógica proposicional.	
	Teoría interpretativa	51
5.1	Valoraciones de un lenguaje formal	51
5.2	Evaluación semántica de fórmulas	52
5.2.1	Tablas de verdad	54
5.3	Modelos y contraejemplos de una fórmula. Tautologías, contin- gencias y contradicciones	56
5.4	Evaluación semántica de deducciones. Consecuencia lógica . . .	58
5.5	Equivalencia de fórmulas	60
5.6	Métodos de refutación. Tableaux	62
5.6.1	Refutación	62
5.6.2	Definición de los tableaux	64
5.6.3	Aplicaciones de los tableaux	72
5.7	Ejercicios propuestos	78
6	Teoría de la demostración y sistema de deducción natural de Gentzen	83
6.1	Definición de sistema formal axiomático	84
6.1.1	Subdeducciones y notación de Fitting	87
6.2	El sistema de deducción natural de Gentzen	88
6.2.1	Definición del sistema de deducción natural de Gentzen . . .	89
6.2.2	Reglas derivadas del sistema de Gentzen	94
6.3	Tableaux sintácticos	104
6.4	Compleitud, corrección y decidibilidad	105
6.5	Ejercicios propuestos	107
7	Problemas de repaso sobre lógica proposicional resueltos	109
7.1	Examen parcial 2005-2006	109
7.2	Soluciones del examen parcial 2005-2006	111
7.3	Primer examen parcial 2006-2007	114
7.4	Soluciones del primer examen parcial 2006-2007	115
7.5	Examen parcial opcional 2006-2007	118
7.6	Soluciones del examen parcial opcional 2006-2007	119
7.7	Primer examen parcial A 2007-2008	122
7.8	Primer examen parcial B 2007-2008	123
7.9	Soluciones de los primeros exámenes parciales A y B 2007-2008 .	124
7.10	Primer examen parcial 2008-2009	127

7.11	Soluciones del primer examen parcial 2008-2009	128
II	Lógica de predicados de primer orden	131
8	Sintaxis de la lógica de primer orden	133
8.1	Alfabeto del lenguaje formal de la lógica de predicados	134
8.2	Definición recursiva de las expresiones bien construidas: términos y fórmulas	138
8.2.1	Variables libres y variables ligadas	141
8.2.2	El principio de inducción estructural para expresiones bien construidas	142
8.3	Representación de las expresiones bien construidas	143
8.3.1	Fórmulas en forma abreviada	143
8.3.2	Principio de unicidad de estructura para expresiones bien construidas	144
8.3.3	Términos y fórmulas en forma de árbol estructural	145
8.3.4	El principio de recursión estructural para expresiones bien construidas	146
8.4	Formalización del lenguaje natural	149
8.5	Ejercicios propuestos	157
9	Semántica de la lógica de primer orden. Teoría interpretativa	159
9.1	Interpretaciones en lógica de primer orden	159
9.2	Interpretación semántica de términos y fórmulas	162
9.3	Validez semántica de fórmulas: modelos	165
9.4	Evaluación semántica de deducciones	167
9.5	Equivalencia de fórmulas	169
9.5.1	Sustitución de una variable por un término	169
9.5.2	Equivalencia de fórmulas	171
9.6	Ejercicios propuestos	174
10	Teoría de la demostración y sistema de deducción natural de Gentzen	177
10.1	Definición del sistema de deducción natural de Gentzen	178
10.1.1	Reglas derivadas del sistema de deducción natural	181
10.2	Corrección, completitud y decidibilidad	183
10.3	Ejercicios propuestos	186
11	Problemas de repaso resueltos	187
11.1	Segundo examen parcial 2006-2007	188
11.2	Soluciones del segundo examen parcial 2006-2007	189
11.3	Examen final A de febrero 2005-2006	192
11.4	Examen final B de febrero 2005-2006	195
11.5	Soluciones de los exámenes finales A y B de febrero 2005-2006	197

11.6	Examen final de septiembre 2005-2006	206
11.7	Soluciones del examen final de septiembre 2005-2006	208
11.8	Examen final de febrero 2006-2007	215
11.9	Soluciones del examen final de febrero 2006-2007	218
11.10	Examen final de septiembre 2006-2007	224
11.11	Soluciones del examen final de septiembre 2006-2007	227
11.12	Examen final de febrero 2007-2008	234
11.13	Soluciones del examen final de febrero 2007-2008	237
11.14	Examen final de septiembre 2007-2008	244
11.15	Soluciones del examen final de septiembre 2007-2008	247
11.16	Examen final de febrero 2008-2009	253
11.17	Soluciones del examen final de febrero 2008-2009	256
A	El sistema de Kleene	263
A.1	El sistema de Kleene para la lógica proposicional	263
A.2	El sistema de Kleene para la lógica de primer orden	272

Capítulo 1

Prólogo

El contenido de esta publicación ha sido elaborado como guión de la asignatura de Lógica Matemática para la titulación de Ingeniería en Informática de la Universidad Rey Juan Carlos.

Estas notas son un intento de presentar de forma organizada el material adecuado para un curso de 60 horas. Por su naturaleza, la exposición teórica no es completa y es fundamental que el alumno consulte también las referencias bibliográficas indicadas.

Los principales objetivos de este libro son:

- Introducir herramientas y conceptos básicos de la Lógica Matemática y sus aplicaciones.
- Ayudar al alumno a aprender a razonar y formalizar correctamente.
- Fijar las bases teóricas para el estudio de la Lógica Informática, así que el alumno pueda tener una formación global acerca de los procedimientos formales y algorítmicos de razonamiento automático y resolución formal de problemas.
- Facilitar la comprensión de los conceptos teóricos de la Lógica Matemática, presentando una amplia colección de problemas con soluciones completas.

Las principales referencias bibliográficas empleadas en estos apuntes son [C], [HLR], [MH], [R] y las notas de clase de los profesores Ana Pradera Gómez y Luis Solá Conde.

Los enunciados y soluciones de algunos de los problemas de esta publicación han sido elaborados por el profesor Ángel Pérez del Pozo.

La primera parte de la publicación trata la lógica proposicional y la segunda la lógica de predicados.

Las dos partes tienen la misma estructura y están divididas en cuatro capítulos. Los primeros tres introducen la sintaxis, la semántica y la teoría de la demostración, respectivamente. El último contiene ejercicios de repaso resueltos. Además, cada capítulo contiene un apartado de ejercicios propuestos.

Estos apuntes incluyen también dos capítulos preliminares. El primero es una breve introducción histórica a la lógica y a sus relaciones con la Filosofía, las Matemáticas y la Informática. El segundo es un repaso de la teoría de conjuntos.

El apéndice A contiene una descripción del sistema axiomático de Kleene, que es equivalente y sirve de justificación teórica del sistema de deducción natural presentado en estos apuntes en los capítulos relativos a la teoría de la demostración.

Consejos prácticos para el estudio de la asignatura

Cierra este prólogo una lista de consejos para los alumnos, que tiene la intención de facilitar el estudio de la lógica matemática.

El principal objetivo del estudio de la lógica es el aprendizaje de las técnicas de demostración formales y sus aplicaciones a la resolución de problemas.

Por eso es indispensable que el alumno domine el lenguaje formal y las técnicas de deducción. Sin estos conocimientos, es imposible desarrollar la actividad creativa necesaria para resolver nuevos problemas, como los que serán propuestos a lo largo de la asignatura.

En general, para aprender un lenguaje es necesario conocer su sintaxis y su semántica. Además, sólo con mucha práctica se puede llegar a hablar y razonar correctamente usando ese lenguaje.

Estas observaciones se aplican tanto a los lenguajes naturales cuanto a los lenguajes formales, incluyendo a los lenguajes de programación.

Lista de consejos:

- **Bibliografía:** tener unos buenos libros de texto facilita enormemente el estudio de cualquier materia. Esta publicación de apuntes de la asignatura es un guión para las clases, no pretende sustituir la bibliografía recomendada.
- **Método de estudio:** las asignaturas de matemáticas requieren un estudio llevado al día. Los temas del programa están desarrollados de forma tal que el aprendizaje sea gradual y, por tanto, no es posible entender un nuevo tema si se tienen dudas importantes sobre el anterior.

Para aclarar dudas es conveniente:

- volver a estudiar el tema que presenta dificultades consultando distintos textos e intentar resolver los problemas propuestos,
 - preguntar las dudas al profesor en clase o durante sus **horas de tutoría**,
 - trabar en grupo con otros compañeros.
- **Tiempo de estudio:** en media, el estudio independiente del alumno tendría que ser de una hora y media para cada hora de clase teórica. Este tiempo incluye las actividades dedicadas a la comprensión de la teoría y de los ejemplos presentados en clase y a la resolución de los ejercicios propuestos.
 - **Clases prácticas:** durante la clases prácticas el alumno puede hacer ejercicios individualmente o en grupo. En este tipo de clases los alumnos pueden verificar si su nivel de comprensión de la materia es el adecuado y tienen la oportunidad de corregir errores de aprendizaje. En las clases prácticas es conveniente aprovechar la presencia y la disponibilidad del profesor para aclarar posibles dudas.

- **Exámenes parciales:** los exámenes parciales también sirven para que el alumno pueda verificar su nivel de conocimiento de la materia. Si es necesario, permiten mejorar su preparación a tiempo para el examen final. Constituyen un importante entrenamiento para poder superar con éxito el examen final.

Nota: La tabla 1.1 contiene los símbolos del alfabeto griego. En estos apuntes, siguiendo la notación tradicional, se usarán varios de ellos. Con mucha frecuencia se emplearán los símbolos:

φ = fi minúscula,
 Φ = fi mayúscula,
 ψ = psi,
 χ = ji.

ALFABETO GRIEGO

Signo	Nombre	Pronunciación
A, α	alfa	<i>a</i>
B, β	beta	<i>b</i>
Γ, γ	gamma	<i>g</i> como gato
Δ, δ	delta	<i>d</i>
E, ε	épsilon	<i>e</i> breve
Z, ζ	dseta	<i>ds</i>
H, η	eta	<i>e</i> largo
Θ, ϑ	zeta	<i>z</i>
I, ι	iota	<i>i</i>
K, κ	kappa	<i>k</i>
Λ, λ	lambda	<i>l</i>
M, μ	mi	<i>m</i>
N, ν	ni	<i>n</i>
Ξ, ξ	xi	<i>ks</i>
O, o	ómicron	<i>o</i> breve
Π, π	pi	<i>p</i>
P, ρ	ro	<i>r</i>
Σ, σ	sigma	<i>s</i>
T, τ	tau	<i>t</i>
Υ, υ	ípsilon	<i>ũ</i>
Φ, φ	fi	<i>f</i>
X, χ	ji	<i>j</i>
Ψ, ψ	psi	<i>ps</i>
Ω, ω	omega	<i>o</i> larga

Tabla 1.1: Alfabeto griego

Capítulo 2

Introducción

La **lógica formal** es la ciencia que estudia *las leyes de inferencia en los razonamientos*. Por medio de la formalización del lenguaje y de sus reglas básicas, proporciona las herramientas necesarias para poder tratar e intentar resolver rigurosamente problemas que tienen sus orígenes y aplicaciones en todas las áreas de las ciencias.

En particular, los alumnos de la Ingeniería en Informática podrán aplicar sus conocimientos de lógica al estudio del Álgebra, del Cálculo, de la Matemática Discreta, de la Electrónica Digital, de la Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales, de la Programación, de las Bases de Datos, etc.

El contenido de este primer capítulo es una breve introducción a los conceptos generales que se desarrollarán en esta publicación.

2.1 El lenguaje de la lógica

- **El lenguaje natural**

El **lenguaje natural** que utilizamos en la comunicación humana permite un alto grado de flexibilidad. Ese lenguaje está caracterizado por su gramática, que nos permite determinar si una cierta frase (una combinación de palabras) es válida.

Por ejemplo, en el idioma español la frase “La mesa habla suavemente” es una frase válida, ya que está compuesta por un artículo (la), seguido por un sujeto (mesa) y un predicado (habla suavemente), que consiste a su vez de un verbo (habla) y de un adverbio (suavemente). Es la **sintaxis** de un lenguaje (las reglas de formación de frases correctas) que nos permite afirmar si una cierta combinación de palabras es válida. Por tanto, la sintaxis no se ocupa del sentido de las frase, sólo determina su validez.

Por el otro lado, la **semántica** de un lenguaje trata el estudio de los sentidos de las frases sintácticamente válidas. Así, la frase del ejemplo anterior es sintácticamente correcta, pero falta de sentido semántico.

- **El lenguaje formal**

La flexibilidad de los lenguajes naturales se basa en la complejidad de sus gramáticas. Es muy complicado, si no imposible, dar una representación completa de las reglas sintácticas de los lenguajes hablados.

Por esa razón, los lenguajes naturales presentan unas limitaciones: si queremos poder formular sólo afirmaciones que se puedan definir correctas (sintácticamente) o verdaderas (semánticamente) sin ningún grado de ambigüedad, tendremos que definir un lenguaje más preciso. Este nuevo lenguaje se suele denominar **lenguaje formal**.

Sin un lenguaje formal sería imposible estudiar las matemáticas, programar un ordenador y, en general, desarrollar razonamientos científicamente irrefutables.

El siguiente ejemplo ilustra como en el lenguaje natural, en este caso en español, existen oraciones para las cuales ni siquiera tiene sentido preguntarse si son verdaderas o falsas.

Ejemplo 2.1.1 *Las frases “¿Cómo te llamas?” y “Por favor, dame tu libro” son dos ejemplos de oraciones a las cuales no podemos asociar un valor de verdad verdadero o falso.*

- **Proposiciones**

Por las razones anteriores y por la necesidad de realizar cálculos exactos, el lenguaje formal de la lógica se construye a partir de unos elementos básicos (atómicos) llamados **proposiciones**, que son oraciones declarativas (apofánticas) simples, a las cuales se pueden asociar valores de verdad sin ninguna ambigüedad.

Entonces las frases “¿Cómo te llamas?” y “Por favor, dame tu libro” no son proposiciones, sin embargo veremos que las frases “Hoy llueve” o “Estudio mucho” lo son.

- **Metalinguaje**

Definimos **metalinguaje** al lenguaje, en nuestro caso el español, que vamos a usar para definir un lenguaje formal.

Por ejemplo, en la frase “ $\sqrt{2}$ es el número real positivo tal que su cuadrado es igual a 2” se usa el metalinguaje español para definir el símbolo matemático $\sqrt{2}$, que pertenece a un lenguaje formal.

2.1.1 Estructura del lenguaje formal

Ya comentamos que el interés principal de la lógica es el estudio de la validez del razonamiento. En la lógica clásica las definiciones básicas de razonamiento y de validez son las siguientes:

Razonamiento (deducción, inferencia, argumento): es la obtención de un nuevo conocimiento (conclusión) a partir de una serie de conocimientos (premisas).

Validez formal de un razonamiento: un razonamiento es formalmente válido si la conclusión es necesariamente verdadera, siendo las premisas verdaderas.

Ejemplo 2.1.2 *Razonamiento válido:*

Premisa 1: Si estudio todo el temario, entonces apruebo la asignatura.

Premisa 2: No he aprobado la asignatura.

Conclusión: No he estudiado todo el temario.

Razonamiento no válido:

Premisa 1: Si estudio todo el temario, entonces apruebo la asignatura.

Premisa 2: No he estudiado todo el temario.

Conclusión: No apruebo la asignatura.

En las matemáticas es necesario aprender a distinguir entre razonamientos que son matemáticamente correctos (las demostraciones) y razonamientos que no lo son. Además, para poder resolver problemas concretos es necesario desarrollar la habilidad de construir razonamientos matemáticos originales.

La lógica proporciona las herramientas necesarias para el razonamiento matemático, pero también para muchas otras aplicaciones.

El diseño de circuitos de un ordenador y a la verificación de la validez de un programa son sólo dos ejemplos de estas aplicaciones en el contexto de la informática.

Resumiendo, la estructura de todo lenguaje formal viene definida por su sintaxis, semántica y sistemas de demostración:

Sintaxis (reglas de formación, gramática): es la definición axiomática de los elementos básicos del lenguaje y de las reglas que permiten obtener nuevas expresiones correctas a partir de aquellos. Las expresiones admitidas por el lenguaje se denominan **fórmulas**.

Semántica (relación entre el lenguaje y su significado): es la definición de un conjunto de significados (generalmente verdadero o falso) que se

puedan asociar a una fórmula. Permite definir la validez de una fórmula o de un razonamiento.

Sistemas de demostración: son sistemas formales que permiten averiguar cuándo una fórmula o un razonamiento son válidos. En el contexto de la sintaxis se denominan **teoría de la demostración**. En el caso de la semántica se denominan **teoría interpretativa**.

2.1.2 Niveles de la lógica formal

Lógica proposicional (lógica de proposiciones, **LP**): en la lógica proposicional se estudian las fórmulas proposicionales construidas a partir de fórmulas atómicas (proposiciones declarativas simples) y conectivos lógicos (y, o, implica, etc.).

Ejemplos 2.1.3 1) Formalización de frases:

Estudio todo el temario (e);

No estudio todo el temario ($\neg(e)$);

Apruebo la asignatura (a);

Estudio todo el temario y apruebo la asignatura ($e \wedge a$);

Si estudio todo el temario, entonces apruebo la asignatura ($e \longrightarrow a$).

2) Formalización de razonamientos:

Razonamiento válido:

Premisa 1: Si estudio todo el temario, entonces apruebo la asignatura ($e \longrightarrow a$).

Premisa 2: No he aprobado la asignatura ($\neg(a)$)

Conclusión: No he estudiado todo el temario ($\neg(e)$)

Razonamiento no válido:

Premisa 1: Si estudio todo el temario, entonces apruebo la asignatura ($e \longrightarrow a$).

Premisa 2: No he estudiado todo el temario ($\neg(e)$)

Conclusión: No apruebo la asignatura ($\neg(a)$)

Lógica de predicados de primer orden, (LPO): la lógica de primer orden es una generalización de la lógica de proposiciones. Distingue entre los objetos del discursos y sus propiedades o posibles relaciones entre ellos. Además, introduciendo nuevos elementos como los cuantificadores existenciales y universales ($\exists$: existe un, $\forall$: para todo), permite estudiar la estructura interna de los enunciados.

Ejemplos 2.1.4 1) *Formalización de una frase:*

“El cuadrado de todo número real es no negativo.”

Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $P(x) : x$ es un número no negativo. La formalización de nuestra frase es:

$$(\forall x(P(x^2))).$$

2) *Formalización de un razonamiento (válido):*

Sean D el conjunto de los seres, $P(x) : x$ es una persona, $M(x) : x$ es mortal y s el símbolo constante “Sócrates.”

Entonces podemos formalizar el siguiente razonamiento:

Premisa 1: Todas las personas son mortales ($\forall x(P(x) \longrightarrow M(x))$)

Premisa 2: Sócrates es una persona ($P(s)$)

Conclusión: Sócrates es mortal ($M(s)$)

Lógicas de orden superior: son extensiones de la lógica proposicional y de predicados de primer orden que amplían el uso de los cuantificadores a las propiedades y a las relaciones entre los objetos. Notar que en la lógica de primer orden los cuantificadores se refieren sólo a los objetos.

En esta publicación se tratará exclusivamente el estudio de la lógica proposicional y de predicados de primer orden.

2.2 Resumen de la historia de la lógica

La definición de lógica como ciencia formal en la cultura occidental es el resultado de un largo desarrollo histórico que empieza con las obras de algunos filósofos griegos y llega hasta la actualidad.

Históricamente las áreas de aplicación más importantes de la lógica son la filosofía, las matemáticas y la informática.

A continuación se presenta un resumen muy reducido de los principales pasos que han llevado a la formulación de la lógica formal. El lector interesado podrá encontrar un tratamiento más extensivo en la referencia [UNED1] y su bibliografía.

2.2.1 Lógica y filosofía

Siglo IV a.C.: En el siglo cuarto antes de nuestra era **Aristóteles** fue el primero en tratar de formalizar el razonamiento humano para poder discernir en la discusiones filosóficas. Aristóteles se puede considerar el fundador de la denominada **lógica clásica**.

Edad Media: Durante la Edad Media el proceso de sistematización de la lógica fue desarrollado por los filósofos árabes y los escolásticos.

Siglo XIII: En el siglo XIII **Santo Tomás de Aquino** empleó la lógica en el contexto de las discusiones teológicas.

Siglo XVII: Fue **Leibniz**, en el siglo XVII, el primero a formular la lógica como base del razonamiento matemático, pero sus estudios fueron abandonados hasta el siglo XIX, cuando finalmente se fundó la **lógica matemática** como ciencia.

2.2.2 Lógica y matemáticas

1854: A mediados del siglo XIX, en el 1854, el inglés **George Boole** publicó el libro *The Laws of Thought* (Las leyes del pensamiento). Influenciado por las teorías de los matemáticos **De Morgan** y **Hamilton**, Boole definió la lógica como sistema formal dirigido no sólo al estudio del lenguaje natural. Su obra proporciona un modelo algebraico de la **lógica de proposiciones**. El modelo matemático conocido como Álgebra de Boole es otro ejemplo muy importante en informática usado para el diseño de circuitos lógicos y las búsquedas booleanas en grandes colecciones de datos (índices de páginas Web, datos genéticos, etc.).

1879: En el 1879 el alemán **Gottlob Frege** publicó el libro *Grundgesetze der Arithmetik: Begriffsschriftlich abgeleitet* (Fundamentos de Aritmética: Conceptualmente derivada), en el cuál se formaliza la **lógica de predicados**.

1920, 1930: A principios del siglo XX **Bertrand Russell** y **Whitehead**, inspirados por el trabajo del matemático italiano **Giuseppe Peano**, publicaron los tres volúmenes de *Principia Mathematica* y **Hilbert**, en 1920, propuse el problema de la axiomatización de las matemáticas.

Programa de Hilbert:

1. toda la matemática se sigue de un sistema **finito** de axiomas escogidos correctamente,
2. tal sistema axiomático se puede probar **consistente** (tal que no se puede demostrar la validez de una fórmula y de su negación).

En 1930 **Gödel** demostró el famoso teorema de incompletitud del enfoque axiomático:

“En cualquier formalización consistente de las matemáticas que sea lo bastante fuerte para definir el concepto de números naturales, se puede construir una afirmación que ni se puede demostrar ni se puede refutar dentro de ese sistema.”

Este teorema contesta negativamente al problema de Hilbert.

De este “debate” nació directamente la base para la **informática teórica** de Alonzo Church y Alan Turing.

1936-1937: **A. Church** y **A. Turing** establecen la indecidibilidad de la lógica de primer orden: no existe un procedimiento general y finito (un algoritmo) que permita decidir si una fórmula de la lógica de primer orden es válida o deducible a partir de un conjunto de fórmulas.

El resultado de todas estas obras fue la base teórica de la teoría axiomática y semántica.

2.2.3 Lógica e informática

1950, 1960: Una nueva época para la lógica comienza en las décadas de 1950 y 1960 a causa de la aparición de los ordenadores. Surgió entonces la necesidad de determinar si fuese posible especificar formalmente programas y definir sistemas de demostración automática de teoremas. Estos tipo de problemas son los principales objetos de estudio de la **lógica informática**.

El nacimiento de la inteligencia artificial y del primer lenguaje declarativo (LISP) se puede fijar en el 1959, con el trabajo de **Mc Carthy**.

1965: A lo largo de los años sesenta se mejoran los primeros sistemas de demostración automática y en el 1965 aparece la la regla universal de resolución con unificación de **Robinson**.

1972: En los años setenta se desarrolló la **programación lógica** como herramienta de resolución de problemas. En 1972 **Colmerauer** creó el primer lenguaje de programación lógica: Prolog. La programación lógica está a la base de la inteligencia artificial y permite deducir nuevos conocimientos a partir de una base de conocimientos (los axiomas) y una serie de deducciones automáticas.

1980: A partir de los años ochenta se empiezan a utilizar nuevas **lógicas no clásicas**, como, por ejemplo, lógicas que permiten dar una interpretación probabilista de la incertidumbre.

Los métodos deductivos de la lógica matemática están a la base de la demostración automática de teoremas. Definida la semántica de un lenguaje de

programación, se pueden usar los métodos de demostración de la lógica matemática para verificar (automáticamente) la corrección de programas y sus propiedades. En general, el problema es encontrar sistemas de demostración más eficientes para su implementación en un ordenador.

Algunas de las áreas de aplicación de la lógica en informática son:

- La minería de datos.
- La descripción de la semántica de los lenguajes de programación y la verificación de programas.
- La demostración automática de teoremas.
- La programación lógica y los sistemas basados en el conocimiento en la inteligencia artificial.

Capítulo 3

Algunas nociones de teoría de conjuntos, relaciones y funciones

Este capítulo es un repaso de algunas nociones de teoría de conjuntos y de las definiciones básicas de relaciones y funciones [CBVB, H].

En esta exposición presentaremos sólo aquellos conceptos indispensables para el estudio de la asignatura de Lógica Matemática. Los alumnos ampliarán sus conocimientos en asignaturas paralelas, que proporcionan un tratamiento más amplio y detallado de los temas aquí considerados.

La lógica y la teoría de conjuntos están estrechamente relacionadas. De hecho en un principio se pensó que toda propiedad $P(x)$ (todo predicado, en el lenguaje de la lógica de primer orden) llevaba asociado un “conjunto”,

$$\{x : P(x)\}.$$

El conjunto obtenido estaría formado por los elementos a del universo de discurso U que satisfacen la propiedad $P(x)$, es decir, tales que se pueda afirmar que $P(x)$ es verdadera si $x = a$.

Así, por ejemplo, sea nuestro universo de discurso “los seres humanos” y sea $P(x)$ la propiedad de un genérico ser humano x de ser alto al menos 1,70 metros. Dado un particular ser humano a , es posible determinar si a mide al menos 1,70 metros, es decir, si a pertenece al conjunto $\{x : P(x)\}$.

Más concretamente, inicialmente se aceptaba la idea que toda propiedad $P(x)$ divide un universo de discurso en dos partes: la formada por los objetos a que satisfacen $P(x)$, $a \in \{x : P(x)\}$, y la formada por los objetos a que no la satisfacen, $a \notin \{x : P(x)\}$.

En 1903 Bertrand Russell propuso el siguiente ejemplo de “conjunto” (según la definición de conjunto de su época)

$$A = \{x : x \notin x\},$$

y preguntó si $A \in A$.

De la definición de A se sigue que $A \in A$ implica que $A \notin A$ y, además, que $A \notin A$ implica que $A \in A$.

Por tanto se obtiene la contradicción: $A \in A$ si y sólo si $A \notin A$.

El ejemplo de Russell muestra que no toda propiedad determina los elementos de un conjunto. Por tanto es necesario restringir la clase de propiedades que definen conjuntos.

La primera de las restricciones es el *axioma de especificación*: una propiedad por sí sola no determina un conjunto, sino que selecciona elementos de un conjunto dado al que es necesario referirse.

Para no incurrir en contradicción con el axioma de especificación, es necesario asumir la no existencia del “conjunto universal U ,” el conjunto de todos los conjuntos. En efecto se puede demostrar que si U fuera un conjunto también $A = \{x \in U : x \notin x\}$ tendría que ser un conjunto. Así que la paradoja de Russell no se podría resolver.

En respuesta a la paradoja de Russell, se propusieron varias formulaciones axiomáticas de la teoría de conjuntos. En nuestra exposición, utilizaremos reglas de construcción de conjuntos formuladas en términos de la lógica de predicados, a partir de los conceptos primitivos de conjunto y pertenencia (Zermelo-Fraenkel, 1922).

3.1 Nociones de teoría de conjuntos

Los conceptos de **conjunto** y de **pertenencia** de un elemento a un conjunto son conceptos *primitivos*, es decir, no se definen.

Diremos que un **conjunto** A es una colección (familia, clase), finita o infinita, de objetos de un universo U , tal que para todo objeto x se pueda determinar si x pertenece a A . Los objetos de un conjunto serán sus **elementos**. Si x pertenece al conjunto A , se escribirá $x \in A$. Si x no pertenece a A , se escribirá $x \notin A$.

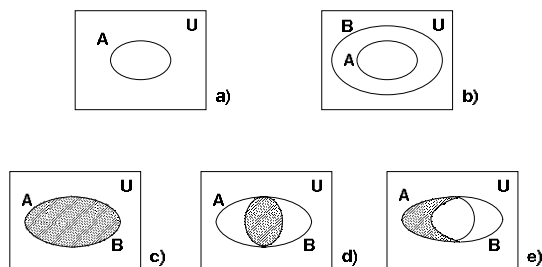


Figura 3.1: Diagramas de Venn

Los **diagramas de Venn** son figuras usadas para representar algunas de las relaciones y operaciones entre conjuntos. El apartado a) de la figura 3.1 es un diagrama de Venn que representa un conjunto A dentro del universo U .

Ejemplos 3.1.1

$\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ es el conjunto de los números naturales,
 $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ es el conjunto de los números enteros,
 $\mathbb{F} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\}$ es el conjunto de las fracciones de números enteros,
 $A := \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$ es el conjunto solución de la ecuación $x^2 - 1 = 0$.

Notación: los símbolos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ denotarán, respectivamente, el conjunto de los números racionales, reales y complejos.

Un conjunto se puede determinar explícitamente escribiendo todos sus elementos (**por extensión**), o más implícitamente (**por comprensión**) caracterizando sus elementos por medio de propiedades (predicados de la lógica de primer orden). Así, por ejemplo,

$$A = \{-1, 1\} \quad \text{y} \quad A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$$

son dos maneras distintas de definir el mismo conjunto.

3.1.1 Inclusión e igualdad de conjuntos

- **Inclusión:** Si todo elemento x de un conjunto A es también elemento de un conjunto B , se dirá que A está contenido en B o que A es un **subconjunto** de B (y se escribirá $A \subseteq B$ ó $B \supseteq A$).
- **Inclusión propia:** Si A es un subconjunto de B y existe un elemento de B que no pertenece a A , entonces A es un **subconjunto propio** de B : $A \subsetneq B$ ó $A \subset B$.

El apartado b) de la figura 3.1 es un diagrama de Venn que representa la inclusión $A \subseteq B$.

- **Igualdad:** Dos conjuntos A y B son **iguales** si contienen los mismos elementos. Por ejemplo, los conjuntos $A = \{-2, 1, 0, -7\}$ y $B = \{-7, 1, 0, -2\}$ son iguales.

Nota importante: para demostrar que dos conjuntos A y B son iguales, es necesario verificar las dos siguientes condiciones:

$$1) A \subseteq B \tag{3.1}$$

$$2) B \subseteq A \tag{3.2}$$

Ejemplos 3.1.2 1) Sean $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 = 0\}$ y $B = \{-2, 1\}$.

Los elementos de A son las soluciones de la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$, es decir, son los números $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$. Ya que $x_1 \in B$ y $x_2 \in B$, $A \subseteq B$. Ahora está claro que también $B \subseteq A$. Por tanto, $A = B$.

2) Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{c, a, d, b\}$, entonces $A = B$.

- **Conjunto vacío:** El **conjunto vacío** $\emptyset$ es el conjunto que no tiene elementos.

Nota: el conjunto $\emptyset$ **no es igual** al conjunto $A = \{\emptyset\}$, pues A tiene un elemento: el conjunto vacío.

Ejemplo 3.1.3 Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\}$. Entonces $A = \emptyset$.

Proposición 3.1.4 Sea A un conjunto cualquiera. Entonces $\emptyset \subseteq A$.

La justificación de esta proposición es inmediata, ya que (como estudiaremos muy pronto) toda deducción con una premisa falsa es verdadera.

3.1.2 Operaciones con conjuntos

Si A y B son dos conjuntos, es posible construir nuevos conjuntos por medio de las siguientes operaciones:

- la **unión** de A y B es el conjunto $A \cup B$ de todos los elementos de A o de B , es decir

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

El apartado c) de la figura 3.1 es un diagrama de Venn que representa la unión $A \cup B$.

- la **intersección** de A y B es el conjunto $A \cap B$ de todos los elementos que pertenecen tanto a A como a B , es decir

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \text{ y } (x \in B)\}.$$

Si A y B no tienen elementos en común, entonces $A \cap B = \emptyset$ y se dirá que A y B son **disjuntos**.

El apartado c) de la figura 3.1 es un diagrama de Venn que representa la unión $A \cup B$.

- el **complemento (relativo) de B respecto de A** es el conjunto $A \setminus B$ de todos los elementos de A que no pertenecen a B , es decir

$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \text{ y } (x \notin B)\}.$$

El apartado d) de la figura 3.1 es un diagrama de Venn que representa el complemento relativo $A \setminus B$.

- el **producto cartesiano** de dos conjuntos *no vacíos* A y B es el conjunto de todos pares *ordenados* (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$, es decir

$$A \times B = \{(a, b) : (a \in A) \text{ y } (b \in B)\}.$$

Para representar gráficamente un producto cartesiano $A \times B$ de dos conjuntos, se puede utilizar un sistema de ejes. Los elementos de A se representan por medio de puntos del eje de las abscisas y los elementos de B por medio de puntos del eje de las ordenadas. Entonces los elementos de $A \times B$ son todos los puntos de “coordenadas” (a, b) .

Por ejemplo, sean $A = \{x, y, z\}$ y $B = \{a, b\}$. La figura (3.2) es una representación gráfica (obtenida con el sistema Maple sustituyendo las letras por números: $x = 1, y = 2, z = 3, a = 1, b = 2$) de $A \times B$.

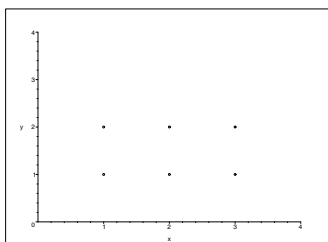


Figura 3.2: Gráfica de $A \times B$.

3.1.3 Partes de un conjunto y propiedades de las operaciones con conjuntos

Si A es un conjunto, se llama **conjunto de las partes de A** , $P(A)$, al nuevo conjunto cuyos elementos son exactamente los subconjuntos de A .

Nota: Para todo conjunto A , $P(A)$ es siempre no vacío, ya que $\emptyset \in P(A)$.

Ejemplo 3.1.5 Sea $A = \{a, b, c\}$. Entonces

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Sean A, B y C tres conjuntos. Las principales propiedades de las operaciones con conjuntos son las siguientes:

1) **idempotencia** de la unión y de la intersección:

$$A \cup A = A \tag{3.3}$$

$$A \cap A = A \tag{3.4}$$

2) **conmutatividad** de la unión y de la intersección:

$$A \cup B = B \cup A \quad (3.5)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (3.6)$$

3) **asociatividad** de la unión y de la intersección:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (3.7)$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (3.8)$$

4) **distributividad** de la unión respecto de la intersección y de la intersección respecto de la unión:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (3.9)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (3.10)$$

5)

$$A \cup \emptyset = A \quad (3.11)$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad (3.12)$$

6) **Leyes de De Morgan** (para conjuntos):

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \quad (3.13)$$

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \quad (3.14)$$

7)

$$(A \setminus B) \cup B = A \cup B \quad (3.15)$$

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset \quad (3.16)$$

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B \quad (3.17)$$

3.1.4 Cardinal de un conjunto

El **cardinal** de un conjunto finito A , $Card(A)$, es el número de elementos de A . Si A es un conjunto infinito se escribirá $Card(A) = \infty$.

Cardinal de la unión: Sean A y B dos conjuntos finitos cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned} Card(A \cup B) &= Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B) \leq \\ &\leq Card(A) + Card(B) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Si $A \cap B = \emptyset$, $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.

Observación: Se puede comprobar que si A es un conjunto finito con $Card(A) = n$, entonces $Card(P(A)) = 2^n$.

Ejemplos 3.1.6 1) $Card(\mathbb{N}) = \infty$

2) Sean $A = \{-2, 0, 3, 17\}$ y $B = \{-7, 0, 5, 17, 18\}$. Entonces, $A \cup B = \{-7, -2, 0, 3, 5, 17, 18\}$ y $A \cap B = \{0, 17\}$. Luego, se verifica que

$$7 = Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B) = 4 + 5 - 2.$$

3.2 Relaciones binarias

Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición 3.2.1 Una **relación binaria** entre A y B es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$. Si $(a, b) \in R$ se dirá que a y b están relacionados y se escribirá aRb .

Ejemplo 3.2.2 Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e\}$ y

$$R = \{(a, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}.$$

Entonces aRd , bRe , cRd y cRe . (Ver figura (3.3))

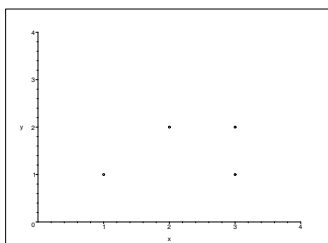


Figura 3.3: Gráfica de R .

Si $R \subseteq A \times A$ (es decir, si $A = B$), se dirá que R es una **relación binaria en A** .

En las siguientes definiciones vamos a emplear el cuantificador universal $\forall$ y el símbolo de implicación $\rightarrow$ de la lógica de predicados, que estudiaremos en detalle. La notación $\forall x \in A$ quiere interpretarse como “para todo elemento x del conjunto A ”.

Una relación R en un conjunto no vacío A puede ser:

- R1) **reflexiva**: $\forall x \in A \quad xRx$
- R2) **simétrica**: $\forall x, y \in A \quad xRy \rightarrow yRx$
- R3) **antisimétrica**: $\forall x, y \in A \quad (xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y$
- R4) **transitiva**: $\forall x, y, z \in A \quad (xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$

Para estudiar las propiedades de una relación binaria sobre un conjunto A es conveniente representar gráficamente la relación (ver ejercicio (3.5.7)).

Observación 3.2.3 Las únicas relaciones binarias en un conjunto no vacío A que sean al mismo tiempo simétricas y antisimétricas son tales que $R \subseteq \{(x, y) : x = y\}$.

Ejemplos 3.2.4 1) Sea A el conjunto de las personas y $R = \{(a, b) \in A \times A : a \text{ es el padre de } b\}$. Esta relación no tiene ninguna de las propiedades $R1$, $R2$ y $R4$.

2) En el conjunto de las partes $P(A)$ de un conjunto A , la relación de inclusión $R = \{(B, C) \in P(A) \times P(A) : B \subseteq C\}$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

3) En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, la relación $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - m \text{ es par}\}$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

4) En el conjunto de las rectas del plano real, la relación “ r es ortogonal a s ” no es reflexiva, es simétrica y no es transitiva.

Definición 3.2.5 Si $R \subseteq A \times B$ es una relación binaria, se denomina

- **dominio** de R al conjunto

$$\text{dom}(R) = \{x \in A : \exists y \in B \text{ tal que } (x, y) \in R\} \subseteq A$$

- **imagen directa (o rango)** de R al conjunto

$$\text{Im}(R) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ tal que } (x, y) \in R\} \subseteq B$$

- **imagen inversa (o recíproca)** de un subconjunto C de B al conjunto

$$R^{-1}(C) = \{x \in A : \exists y \in C \text{ tal que } (x, y) \in R\} \subseteq A$$

- **codominio** de R al conjunto B .

3.2.1 Relaciones de equivalencia

Definición 3.2.6 Una relación binaria R en un conjunto no vacío A se denomina **relación de equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva. Si R es una relación de equivalencia en A y $a, b \in A$ son tales que aRb , se escribirá $a \sim b$.

Si $a \in A$ y $\sim$ es una relación de equivalencia en A , se puede definir un subconjunto $C(a)$ de A denominado **clase de equivalencia de a** :

$$C(a) = \{x \in A : x \sim a\}. \quad (3.19)$$

Notar que $C(a)$ no es vacío ya que toda relación de equivalencia es reflexiva.

Sea b otro elemento de A . Puede ocurrir sólo una de las siguientes situaciones:

$$\text{si } a \sim b, \text{ entonces } C(a) = C(b), \quad (3.20)$$

$$\text{si } a \not\sim b, \text{ entonces } C(a) \cap C(b) = \emptyset. \quad (3.21)$$

Por tanto, si consideramos el conjunto de las *distintas* clases de equivalencias, este conjunto representa una *partición* de todo A entre subconjuntos disjuntos y se denomina *conjunto cociente*.

Ejemplos 3.2.7 1) La relación $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n - m \text{ es par}\}$, es una relación de equivalencia y $\mathbb{Z} = C(0) \cup C(1)$. $C(0)$ es el conjunto de todos los enteros pares y $C(1)$ de los enteros impares.

2) En el conjunto de las rectas del plano real, la relación “ r es paralela a s ” es una relación de equivalencia. Para toda recta r , $C(r)$ representa a la **dirección** determinada por r .

3) Números racionales

En el conjunto $\mathbb{F}$ de las fracciones $\mathbb{F} := \{p/q : p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\}$, para todo par de fracciones $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ y $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$, se define la relación de equivalencia R como $r_1 \sim r_2 \leftrightarrow p_1 q_2 = p_2 q_1$. El conjunto de las clases de equivalencia es el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Observación 3.2.8 Otra importante clase de relaciones binarias sobre un conjunto es la clase de las relaciones de orden, que no necesitaremos conocer para el estudio de la lógica matemática. Además, el alumno tendrá ocasión de estudiar las relaciones de orden en la asignatura paralela de Matemática Discreta y Álgebra. Por estas razones, omitimos su estudio en estos apuntes.

3.3 Relaciones n -arias

Sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ conjuntos no vacíos.

Definición 3.3.1 Una **relación de aridad n o n -aria** es un subconjunto R del producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Si $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$ se dirá que $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ están relacionados.

Ejemplo 3.3.2 Sean $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{d, e\}$ y $A_3 = \{1, 2\}$.

$R = \{(a, d, 1), (b, e, 1), (c, d, 2), (c, e, 2)\}$ es una relación ternaria sobre $A_1 \times A_2 \times A_3$.

3.4 Funciones

Una función (o aplicación) $(n+1)$ -aria, $f : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \longrightarrow B$, de un conjunto no vacío $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ a un conjunto no vacío B se puede definir como “una regla de correspondencia que asigna a cada elemento $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$ un único elemento $b = f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in B$.” Esta definición es muy intuitiva, pero no explica el término “regla de correspondencia” con suficiente claridad.

La siguiente definición es más general e identifica el concepto de función con una clase particular de relaciones binarias.

Definición 3.4.1 Sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ y B conjuntos no vacíos. Una **función (o aplicación) $(n+1)$ -aria** $f : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \longrightarrow B$ es una relación $(n+1)$ -aria $f \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times B$ tal que

- f1) $\text{dom}(f) = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$,
f2) si $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \text{dom}(f)$ existe un **único** $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in B$ tal que $(a_1, a_2, \dots, a_n, f(a_1, a_2, \dots, a_n)) \in f$.

Entonces una función $f : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \longrightarrow B$ es una relación entre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ y B tal que a cada elemento de $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ corresponde un único elemento $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ del codominio B . Si $(a_1, a_2, \dots, a_n, f(a_1, a_2, \dots, a_n)) \in f$, se dirá que $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ es la **imagen** de $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ por la función f o el **valor** de f en $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Si el dominio de una función está compuesto de un sólo conjunto A , entonces la función es **binaria**.

Test de la recta vertical: Una relación $R \subseteq A \times B$ es una función si y sólo si

- 1) $\text{dom}(R) = A$ y
- 2) su gráfica corta a cada “recta vertical” en un punto a lo más.

Ejemplos 3.4.2 1) La relación binaria definida en el ejemplo (3.2.2) no es una función.

2) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$, es tal que $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

3) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$, es tal que $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} (= [0, \infty))$. En este caso, $f^{-1}([0, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ y $f^{-1}((-2, 0]) = \{0\}$.

4) La función $f(x) = \sqrt{x}$ está definida sólo para números reales no negativos, entonces $\text{dom}(f) = \text{Im}(f) = [0, \infty)$.

5) El dominio de la función $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ es $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Definición 3.4.3 Dos funciones $f, g \subseteq A \times B$ son **iguales** si y sólo si:

- a) $\text{dom}(f) = \text{dom}(g)$
- b) $\forall x \in \text{dom}(f), f(x) = g(x)$.

Ejemplo 3.4.4 Las funciones $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = x^2, \forall x > 0$ no son iguales, ya que $\text{dom}(f) \neq \text{dom}(g)$.

Definición 3.4.5 Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones. La función **composición (o compuesta)** de f y g es la función $g \circ f : A \longrightarrow C$ definida por $\forall a \in A, (g \circ f)(a) = g(f(a))$. Entonces

$$g \circ f = \{(a, g(f(a))) : a \in A\} \subseteq A \times C.$$

Ejemplos 3.4.6 a) Siendo $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos, sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ la función $f(x) = x^2 + 1$ y sea $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ la función $g(x) = \sqrt{x}$.

Entonces, la función $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es la función $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$.

b) Sean D el conjunto de las personas, M el subconjunto de las madres y A el subconjunto de las abuelas.

Definimos las funciones $f : D \longrightarrow M$ y $g : M \longrightarrow A$ que asocian a toda persona y a toda madre, respectivamente, su propia madre.

En este caso la función $g \circ f : D \longrightarrow A$ resulta ser la función que asocia a toda persona su abuela materna.

3.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.5.1 Sean $A = \{-1, 0, 3, 7\}$ y $B = \{-3, -1, 0, 3, 5, 7, 8\}$. Determinar $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \setminus B$.

Ejercicio 3.5.2 Sean $A = \{-1, 0, 3, 7\}$ y $B = \{-1, 1\}$. Determinar y representar gráficamente el conjunto $A \times B$.

Ejercicio 3.5.3 Demostrar las propiedades

$$(A \setminus B) \cup B = A \cup B \quad (3.22)$$

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset \quad (3.23)$$

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B \quad (3.24)$$

Ejercicio 3.5.4 ¿Es cierto que una relación de equivalencia R sobre un conjunto no vacío A puede ser antisimétrica?

Ejercicio 3.5.5 Sean $A = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (b, a), (c, b), (c, c)\}$. Entonces aRa, bRa, cRb y cRc . Representar gráficamente la relación R .

Ejercicio 3.5.6 En base a la siguiente Tabla 1, describir las relaciones en el conjunto $A = \{\text{Andrea, Beatriz, Carlos, Davide, Edward}\}$:

- 1) $xR_1y \leftrightarrow x$ e y viven en el mismo país.
- 2) $xR_2y \leftrightarrow x$ e y tienen el mismo número de teléfono o la misma edad.
- 3) $xR_3y \leftrightarrow x$ e y tienen la misma altura y son europeos.

Tabla 1	Edad	Tel.	País	Altura	Ocupación
Andrea	21	43-6950-555-0001	Alemania	1,75	Informática
Beatriz	18	34-91-555-0000	España	1,68	Estudiante
Carlos	37	34-91-555-0000	España	1,75	Profesor
Davide	18	39-06-555-0002	Italia	1,65	Estudiante
Edward	21	1-215-555-0003	EEUU	1,68	Profesor

Ejercicio 3.5.7 Interpretar gráficamente las propiedades reflexiva, simétrica y antisimétrica.

Ejercicio 3.5.8 Determinar dominio e imagen de las relaciones definidas en los ejemplos (3.2.2) y (3.2.4).

Ejercicio 3.5.9 Utilizando la Tabla 1 del ejercicio (3.5.6), definir una relación de equivalencia en A y determinar las relativas clases de equivalencia.

Ejercicio 3.5.10 Determinar cuáles de las siguientes relaciones binarias son funciones:

- a) Sobre el conjunto de las personas, la relación que asocia a cada persona su madre.

b) Sobre el conjunto de las personas que tienen hermanos, la relación que asocia a cada persona su hermano.

c) Sean A el conjunto de los alumnos matriculados en nuestra asignatura el año pasado y B el conjunto de las notas

$$\{NP, SS, AP, NT, SB, MH\}.$$

En $A \times B$ definimos la relación que asocia a cada alumno su nota final.

d) Con la notación del apartado c), en $B \times A$ definimos la relación que asocia a cada nota los alumnos que han sacado esa nota en la asignatura.

Ejercicio 3.5.11 a) Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ y $g(x) = x + 1$. Verificar que $g \circ f \neq f \circ g$. (Entonces la composición de funciones no es conmutativa.)

b) Sean $Id_A : A \longrightarrow A$ y $Id_B : B \longrightarrow B$ las funciones identidad sobre los conjuntos A y B , respectivamente ($Id_A(a) = a$, $Id_B(b) = b$, si $a \in A$ y $b \in B$).

Demostrar que si $f : A \longrightarrow B$ es una función, entonces $f = Id_B \circ f = f \circ Id_A$.

c) Descomponer la función $f(x) = \sqrt{3 + (\frac{1}{2 + \sin(x)})^2}$ en una composición de funciones más simples.

Parte I

Lógica de proposiciones

Capítulo 4

Sintaxis de la lógica proposicional

Como ya comentamos en el capítulo de introducción, la **sintaxis** es la definición axiomática de los elementos básicos del lenguaje y de las reglas que permiten obtener nuevas expresiones correctas a partir de aquellos, las fórmulas.

Recordamos que se puede fijar el origen de la lógica matemática (y de la lógica proposicional) al final del siglo XIX, coincidiendo con la aparición de las obras de G. Boole (1815-1864) y de G. Frege (1848-1925).

El objetivo de este capítulo es el estudio de la sintaxis de la **lógica proposicional** que nos permite analizar las fórmulas proposicionales construidas a partir de fórmulas atómicas (proposiciones declarativas simples) y conectivos lógicos.

Definiciones generales:

- Un **alfabeto** A es un conjunto de símbolos.
- Una **palabra sobre el alfabeto** A es una secuencia finita de símbolos de A . Al conjunto de todas las posibles palabras se le suele denotar como A^* .
- Un **lenguaje sobre el alfabeto** A es un cualquier subconjunto de A^* .
- Las **reglas de formación** son las reglas que permiten obtener nuevas expresiones de un lenguaje a partir de expresiones básicas.

Así, por ejemplo, si A es el alfabeto del idioma español, “aytzco” es una palabra sobre A . Un lenguaje es el conjunto de las palabras del diccionario de español y la gramática española define las reglas de formación de expresiones correctas.

A continuación vamos a definir el lenguaje de la lógica de proposiciones por medio de su alfabeto y sus reglas de formación.

4.1 Alfabeto del lenguaje formal de la lógica proposicional

Los elementos básicos del **alfabeto del la lógica proposicional** son:

- **Las proposiciones atómicas (enunciados simples o variables proposicionales):** son proposiciones (oraciones declarativas a las cuales se pueden asociar valores de verdad) que no pueden descomponerse en otras proposiciones más simples.

Para representar las proposiciones atómicas se suelen usar los símbolos $p, q, r, s, t, \dots$. El conjunto de estos símbolos se suele denominar **signatura**.

Ejemplos 4.1.1 *Los siguientes son ejemplos de proposiciones simples:*

p = la raíz cuadrada de 2 es irracional,

q = hoy me siento feliz,

t = los gatos son felinos.

- **Los conectivos lógicos:**

1. **constantes (de aridad 0):** $\top$ (verdadero) y $\perp$ (falso)

2. **conectivos unarios (de aridad 1):** $\neg$ (negación)

Ejemplo 4.1.2 *Siendo q = hoy me siento feliz, aplicando la negación se obtiene $\neg(q)$ = hoy no me siento feliz.*

3. **conectivos binarios (de aridad 2):**

$\wedge$ (y: la conjunción),

$\vee$ (ó: la disyunción),

$\rightarrow$ (la implicación o condicional),

$\leftrightarrow$ (la doble implicación o coimplicación).

NOTACIÓN: El símbolo $\circ$ se usará para representar un conectivo binario cualquiera.

Ejemplos 4.1.3 1) La frase “Hoy llueve, sin embargo no hace frío” se escribe como $(p \wedge \neg(q))$, donde p = hoy llueve y q = hace frío.

2) La frase “Los lápices de mi hermana son rojos o negros” se escribe como $(p \vee q)$, donde p = los lápices de mi hermana son rojos y q = los lápices de mi hermana son negros.

3) La frase “La luna es de papel si y sólo si Carlos lee muchos libros” se escribe como $(p \leftrightarrow q)$, donde p = la luna es de papel y q = Carlos lee muchos libros.

Conectiva lingüística	Conectivo lógico	Símbolo	Fórmula
verdadero	<i>Constante (de aridad 0)</i>	$\top$	$\top$
falso	<i>Constante (de aridad 0)</i>	$\perp$	$\perp$
no p	<i>Negación (unario)</i>	$\neg$	$\neg(p)$
p y q	<i>Conjunción (binario)</i>	$\wedge$	$(p \wedge q)$
p ó q	<i>Disyunción (binario)</i>	$\vee$	$(p \vee q)$
si p entonces q	<i>Implicación (binario)</i>	$\rightarrow$	$(p \rightarrow q)$
p si y sólo si q	<i>Coimplicación (binario)</i>	$\leftrightarrow$	$(p \leftrightarrow q)$ o $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Tabla 4.1: Los conectivos de la lógica proposicional

- Los símbolos de puntuación (o símbolos auxiliares): paréntesis abiertos y cerrados.

Ejemplo 4.1.4 La frase “Si n es un número primo y mayor que 2, entonces n es impar” se escribe como $((p \wedge q) \rightarrow r)$, donde $p = n$ es primo, $q = n$ es mayor que 2 y $r = n$ es impar.

4.2 Definición recursiva de las expresiones bien construidas: fórmulas

Los elementos básicos de un lenguaje permiten definir cadenas finitas de símbolos arbitrarias (**palabras**). Así, por ejemplo, la palabra $(\neg p \wedge \vee)q \rightarrow$ se puede formar a partir del alfabeto de la lógica de proposiciones. De todas las posibles palabras, nos interesa definir aquellas que se obtienen a partir del alfabeto dado sólo por medio de la reglas de formación de nuestro lenguaje.

En matemáticas y en la ciencia de la computación a menudo se usan **definiciones recursivas** de conjuntos, funciones o algoritmos, como en los siguientes ejemplos:

Ejemplos 4.2.1 1) Para definir el conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ de los números naturales se puede dar un símbolo inicial 1 y unas reglas de formación, que nos permiten hallar el resto de los elementos del conjunto. En nuestro caso, la definición recursiva de los números naturales está dada por los axiomas de Peano (siglo XIX).

Axiomas de Peano:

- En $\mathbb{N}$ hay un elemento distinguido que denominamos **1**.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define de manera única el **siguiente** de n . El siguiente de n se denota $s(n) = n + 1$ y es un elemento de $\mathbb{N}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

- No existe ningún número natural n tal que $s(n) = 1$.
- Si $s(n) = s(m)$ entonces $n = m$.
- **Principio de inducción:** si un conjunto de números naturales contiene al 1 y a los sucesores de cada uno de sus elementos, entonces contiene a todos los números naturales.

2) Otro ejemplo muy conocido es la definición recursiva de la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Fibonacci (hacia 1175 – 1250), que fue definida para estudiar la reproducción de los conejos. Sus primeros dos términos son $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$. Si $n \geq 3$, entonces el valor f_n se deduce de los valores f_{n-1} y f_{n-2} según la fórmula $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Se sigue que $\{f_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$.

3) El factorial de un número natural n ,

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1,$$

se puede definir también de forma recursiva:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ n(n - 1) & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

4) El algoritmo de búsqueda binaria es un ejemplo de algoritmo de tipo “divide y vencerás,” que se define de forma recursiva. El problema que se quiere resolver es de determinar si un cierto número x pertenece a una dada lista (finita) ordenada de números l . El algoritmo de búsqueda binaria divide primero la lista l en dos mitades y compara x con un elemento central. Si el elemento central es distinto de x , determina a cuál de las mitades puede pertenecer x . Seleccionada esta nueva lista, vuelve a comparar x con su elemento central y a seleccionar aquella mitad de la nueva lista que puede contener x . Estas particiones se repiten hasta llegar a una lista de un sólo elemento, que puede ser o no ser igual a x .

En la lógica proposicional también se usa la siguiente construcción de tipo recursivo para definir las expresiones sintácticamente correctas:

Definición 4.2.2 Una fórmula proposicional (fórmula bien construida, fbc) es una palabra sobre el alfabeto de la lógica proposicional que puede construirse en un número finito de pasos mediante las reglas de formación que vamos a definir a continuación:

Definición recursiva de las fórmulas proposicionales:

1. (At): Los símbolos $\top$ y $\perp$ y toda proposición atómica son una fórmula.

2. $(\neg)$: Si φ es una fórmula entonces $\neg(\varphi)$ es una fórmula.
3. $(\circ)$: Si φ y ψ son dos fórmulas entonces $(\varphi \circ \psi)$ es una fórmula.
4. Si una palabra no se obtiene mediante las tres reglas anteriores entonces no es una fórmula.

NOTACIÓN: Para representar las fórmulas se suelen usar las letras del alfabeto griego $\varphi, \psi, \chi, \dots$ (ver la tabla del alfabeto griego contenida en el prólogo de esta publicación).

Definición 4.2.3 Dadas dos fórmulas φ y ψ , se dice que ψ es una **subfórmula** de φ si ψ consiste de símbolos consecutivos de φ . En particular, cada fórmula es una subfórmula de sí misma.

Ejemplo 4.2.4 La palabra $((p \wedge q) \rightarrow r)$, del ejemplo (4.1.4) es una fórmula bien construida ya que:

1. p, q, r , son fórmulas atómicas (aplicando (At)),
2. $(p \wedge q)$ es una fórmula proposicional (aplicando $(\circ)$),
3. $((p \wedge q) \rightarrow r)$ es una fórmula proposicional (aplicando $(\circ)$).

Además, $(p \wedge q)$ y r son subfórmulas de $((p \wedge q) \rightarrow r)$.

4.2.1 El principio de inducción estructural para fórmulas proposicionales (demostración de propiedades)

Para poder **estudiar propiedades** de las fórmulas proposicionales una de las técnicas más adecuadas es el **principio de inducción estructural para fórmulas proposicionales**, que es una versión generalizada (y más compleja) del razonamiento de inducción definido a partir de los axiomas de Peano de los números naturales.

Antes de enunciar el principio de inducción estructural para fórmulas proposicionales, recordamos la definición de razonamiento por inducción sobre los números reales:

Razonamiento por inducción

Sea $P(n)$ una propiedad para números naturales. Supongamos que se pueda probar que:

1. **Base de inducción:** se verifica $P(1)$,
2. **Paso de inducción:** si se verifica $P(n)$ (**hipótesis de inducción**), entonces se verifica $P(n + 1)$.

Bajo las hipótesis anteriores, se sigue que se verifica $P(n)$ para **todo número natural** n .

La demostración de la validez del razonamiento de inducción se obtiene aplicando el principio de inducción al conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ se verifica}\}$.

Ejemplo 4.2.5 *Vamos a demostrar por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$2^n \leq (n + 1)!$$

Base de inducción: $P(1)$ es verdadera, siendo $(2 \leq 2)$.

Paso de inducción: si $2^n \leq (n + 1)!$ (si se verifica $P(n)$), entonces

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq 2 \cdot (n + 1)! \leq (n + 2) \cdot (n + 1)! = (n + 2)!.$$

Por tanto, $2^n \leq (n + 1)!$ se verifica para todo número natural n .

El principio de inducción estructural generaliza el método de demostración por inducción. Ese método de demostración se emplea para verificar propiedades de conjuntos generados inductivamente (recursivamente), cuyos elementos se obtienen como resultado de aplicar un número finito de reglas de formación.

Sus aplicaciones son numerosas y en informática se utiliza, por ejemplo, para la verificación de programas (ver por ejemplo los capítulos 9 de [BA] y [C]).

Principio de inducción estructural para fórmulas proposicionales

Sea $\mathbb{P}$ una cierta propiedad tal que:

1. **Base de inducción (At):** Los símbolos $\top$ y $\perp$ y toda proposición atómica cumplen la propiedad $\mathbb{P}$.

2. **Pasos de inducción:**

- $(\neg)$: Si φ es una fórmula que cumple la propiedad $\mathbb{P}$ (hipótesis de inducción), entonces $\neg(\varphi)$ cumple la propiedad $\mathbb{P}$.
- $(\circ)$: Si φ y ψ son dos fórmulas que cumplen la propiedad $\mathbb{P}$ (hipótesis de inducción), entonces $(\varphi \circ \psi)$ cumple la propiedad $\mathbb{P}$.

Entonces, el **principio de inducción estructural para fórmulas proposicionales** afirma que, si se verifican las condiciones anteriores, se puede concluir que **toda fórmula proposicional** cumple la propiedad $\mathbb{P}$.

Ejemplo 4.2.6 [HLR] *Usando el principio de inducción estructural podemos probar que toda fórmula φ contiene el mismo número de paréntesis abiertos y cerrados:*

Base de inducción (At): Los símbolos $\top$ y $\perp$ y toda proposición atómica contienen 0 paréntesis abiertos y 0 paréntesis cerrados.

Pasos de inducción:

$(\neg)$: Si φ es una fórmula que contiene n paréntesis abiertos y n paréntesis cerrados, entonces $\neg(\varphi)$ contiene $n + 1$ paréntesis abiertos y $n + 1$ paréntesis cerrados.

$(\circ)$: Si φ y ψ son dos fórmulas que contienen n_φ y n_ψ paréntesis abiertos y n_φ y n_ψ paréntesis cerrados respectivamente, entonces $(\varphi \circ \psi)$ contiene $n_\varphi + n_\psi + 1$ paréntesis abiertos y $n_\varphi + n_\psi + 1$ paréntesis cerrados.

Se sigue que, por el principio de inducción estructural, toda fórmula φ contiene el mismo número de paréntesis abiertos y cerrados.

4.3 Representación de las fórmulas bien construidas

En este apartado vamos a ilustrar las maneras más usadas para representar las fórmulas de la lógica proposicional.

4.3.1 Fórmulas en forma usual y abreviada

Forma usual

Siguiendo las reglas de formación de las fórmulas proposicionales obtenemos ejemplos de expresiones bien construidas como las siguientes:

1. $((p \wedge (p \rightarrow r)) \vee (q \leftrightarrow t)),$
2. $(p \wedge (\neg(\neg((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee (\neg(r)))))$),
3. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)).$

Se puede notar que se usan paréntesis para evitar ambigüedad en la formalización. Sin embargo este uso se puede relajar obteniendo expresiones que no son fórmulas bien construidas, pero vienen empleadas como tales por razones de convenios.

Forma abreviada

Para reducir una fórmula bien construida a su **forma abreviada** podemos seguir los siguientes pasos:

a) Se puede **omitir el par de paréntesis externo**.

Así, por ejemplo, las anteriores fórmulas 1., 2. y 3. se escribirían como:

- 1.1. $(p \wedge (p \rightarrow r)) \vee (q \leftrightarrow t),$
- 2.1. $p \wedge (\neg(\neg((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee (\neg(r)))))$),
- 3.1. $p \rightarrow (q \rightarrow r).$

b) Se introducen las siguientes **reglas de precedencia** entre conectivos que definen las prioridades que tenemos que respetar a la hora de aplicarlos:

Nivel 1: $\neg$,
Nivel 2: $\vee$ y $\wedge$,
Nivel 3: $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$.

Así, por ejemplo, las anteriores fórmulas 1.1, 2.1. y 3.1 se escribirían como:

$$1.2. (p \wedge (p \rightarrow r)) \vee (q \leftrightarrow t),$$

$$2.2. p \wedge \neg\neg((q \rightarrow r) \rightarrow p \vee \neg r),$$

$$3.2. p \rightarrow (q \rightarrow r).$$

c) Se admite el **convenio de asociatividad**: los conectivos $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ se asocian por la derecha:

$$p \wedge q \wedge r \quad \text{es} \quad p \wedge (q \wedge r)$$

$$p \vee q \vee r \quad \text{es} \quad p \vee (q \vee r)$$

$$p \rightarrow q \rightarrow r \quad \text{es} \quad p \rightarrow (q \rightarrow r).$$

Así, por ejemplo, las anteriores fórmulas 1.2, 2.2. y 3.2 se escribirían como:

$$1.3. (p \wedge (p \rightarrow r)) \vee (q \leftrightarrow t),$$

$$2.3. p \wedge \neg\neg((q \rightarrow r) \rightarrow p \vee \neg r),$$

$$3.3. p \rightarrow q \rightarrow r.$$

4.3.2 Fórmulas en forma de árbol estructural

El siguiente **principio de unicidad de estructura para fórmulas proposicionales** afirma que cada fórmula admite un análisis sintáctico único, es decir, existe una única manera de derivar una fórmula usando las reglas de formación dadas.

Principio de unicidad de estructura para fórmulas proposicionales

Toda fórmula proposicional φ pertenece a una y sólo una de las siguientes categorías:

1. (At): φ es atómica,
2. ($\neg$): φ es $\neg(\varphi_1)$ para cierta fórmula φ_1 ,
3. ($\circ$): φ es $(\varphi_1 \circ \varphi_2)$ para cierto conectivo $\circ$ y ciertas fórmulas φ_1 y φ_2 .

Además, en todos los casos la fórmulas φ_1 y φ_2 están unívocamente determinadas.

Una primera consecuencia del principio de unicidad de estructura es la posibilidad de representar fórmulas proposicionales por medio de árboles. Este tipo de representación nos permite facilitar el análisis de la estructura sintáctica de toda fórmula, ya que nos permite recorrer al revés los pasos de su construcción.

El alumno estudiará el concepto de árbol en detalle en el contexto de la teoría de grafos en la asignatura de *Matemática Discreta y Álgebra*. Aquí

queremos simplemente introducir, por medio de ejemplos, árboles con raíz para realizar diagramas gráficos asociados a fórmulas proposicionales.

Repaso de algunas definiciones y propiedades básicas sobre árboles [CM, R]:

Definición 4.3.1 Un grafo simple G es un par $G = (V, E)$ formado por un conjunto finito de **vértices** V y un conjunto E de pares no ordenados de vértices distintos, es decir,

$$E \subset \{\{u, v\} \mid u, v \in V \wedge u \neq v\}.$$

A los elementos de E se les denomina **aristas** (no dirigidas o no orientadas).

Definición 4.3.2 El **grado** de un vértice en un grafo simple es el número de aristas incidentes con él.

Definición 4.3.3 Un **camino de longitud n** entre los vértices a y b de un grafo no dirigido es una sucesión finita $(e_0, \dots, e_{n-1})$ de aristas del grafo

$$e_0 = \{v_0, v_1\}, e_1 = \{v_1, v_2\}, \dots, e_{n-1} = \{v_{n-1}, v_n\}$$

de manera que $v_0 = a$, $v_n = b$ y cada arista sucesiva empieza donde terminó la anterior. Si el grafo es simple, el camino $(e_0, \dots, e_{n-1})$ queda perfectamente determinado por la sucesión de vértices

$$(a, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, b).$$

Diremos que el camino anterior **pasa por** (o **atraviesa**) los vértices a , v_1 , v_2 , ..., v_{n-1} , b .

Se dice que un camino es un **circuito** si es cerrado, esto es, empieza y termina en el mismo vértice, es decir, si $a = b$.

Se dice que un camino es **simple** si no contiene a la misma arista más de una vez.

Un circuito que no pasa dos veces por el mismo vértice (salvo el inicial por el que pasa dos veces) se llama **ciclo**.

Definición 4.3.4 Un grafo $G = (V, E)$ es **conexo** si es posible unir cada par de vértices de V por medio de un camino del grafo.

Definición 4.3.5 Un **árbol** es un grafo no dirigido, conexo y sin circuitos simples.

Proposición 4.3.6 Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. G es un árbol si y solamente si para cada par de vértices $u, v \in V$ existe un único camino simple que une u con v .

Definición 4.3.7 Un **árbol con raíz** es un par (T, r) donde T es un árbol y r un vértice distinguido de T llamado **raíz** al que se suele colocar en la representación gráfica en la parte superior.

Definición 4.3.8 Dado un árbol con raíz (G, r) se denominan **hojas** a los vértices de G distintos de r que tienen grado 1.

A los vértices distintos de la raíz que no son hojas de un árbol con raíz se les denomina **vértices internos**.

Toda arista de un árbol con raíz se puede considerar orientada hacia abajo, es decir, su vértice inicial es el más cercano a la raíz y su vértice final es el que está más alejado de la raíz. Esta orientación está justificada por la proposición 4.3.6, que nos permite medir la longitud de los dos únicos caminos que unen la raíz del árbol con los vértice de cualquiera de sus aristas. Por tanto podemos considerar los árboles con raíz como grafos dirigidos.

Los árboles con raíz llevan asociada una terminología de origen botánico y genealógico: dado un árbol con raíz T , si v es un vértice de T distinto de la raíz, el **padre** de v es el único vértice u de T tal que hay una arista orientada de u a v . Si u es el padre de v , también diremos que v es un **hijo** de u . Los **antecedentes** de un vértice son los vértices que nos encontramos en el único camino que une la raíz con dicho vértice. Los **descendientes** de un vértice v son todos aquellos vértices de los que v es antecesor. Es fácil darse cuenta de que las hojas de un árbol dirigido son los vértices que no tienen descendientes. Todo camino simple que une la raíz con una de las hojas del árbol se denomina **rama**.

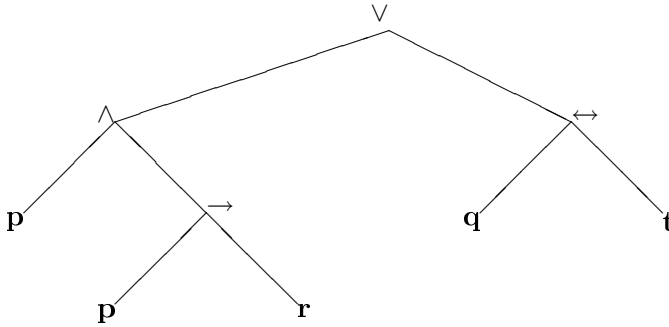


Figura 4.1: Árbol sintáctico de $((p \wedge (p \rightarrow r)) \vee (q \leftrightarrow t))$.

Vamos entonces a usar árboles con raíz para representar la estructura sintáctica de las fórmulas proposicionales como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.9 Sea φ la fórmula proposicional

$$((p \wedge (p \rightarrow r)) \vee (q \leftrightarrow t)).$$

Para representar la estructura sintáctica de φ , podemos dibujar el árbol con raíz de la figura (4.1).

Las hojas del árbol obtenido representan las fórmulas atómicas a partir de las cuales se ha generado φ . El árbol se lee de abajo hacia arriba y en cada nodo interior y en la raíz aparecen los conectivos empleados en la formación de nuestra fórmula.

Ejemplo 4.3.10 La figura (4.2) representa el árbol sintáctico de la fórmula $(\neg(p \rightarrow (q \wedge r)))$.

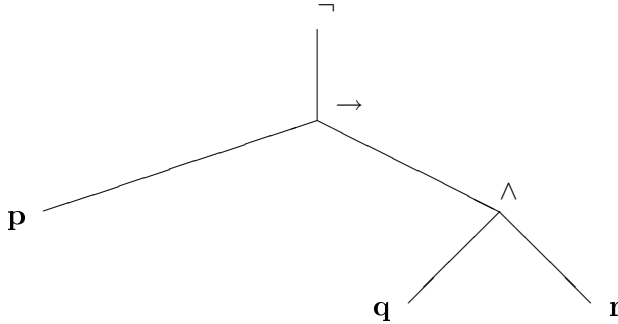


Figura 4.2: Árbol sintáctico de $(\neg(p \rightarrow (q \wedge r)))$.

4.3.3 El principio de recursión estructural para fórmulas proposicionales (definición de funciones)

Una segunda consecuencia del principio de unicidad de estructura es el **principio de recursión estructural para fórmulas proposicionales** que nos permite **definir funciones**

$$f : \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{A}$$

cuyo dominio sea el conjunto $\mathbf{L}$ de todas las fórmulas proposicionales y cuyo codominio sea un conjunto dado $\mathbf{A}$.

El **principio de recursión estructural para fórmulas proposicionales** consiste en la siguiente definición recursiva de la función $f : \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{A}$:

1. **Base (At):** Si φ es atómica, $f(\varphi)$ se define explícitamente, es un elemento de $\mathbf{A}$,
2. **Pasos recursivos:**
 - $(\neg)$: $f(\neg(\varphi))$ es un valor que depende de $\neg$ y de $f(\varphi)$,

- $(\circ)$: $f(\varphi_1 \circ \varphi_2)$ para cierto conectivo $\circ$ y ciertas fórmulas φ_1 y φ_2 es un valor que depende de $\circ$, $f(\varphi_1)$ y $f(\varphi_2)$.

Estas definiciones determinan la función f sobre todo $\mathbf{L}$.

Ejemplo 4.3.11 (HLR) *Se puede definir recursivamente la función*

$$f : \mathbf{L} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

que a cada fórmula $\varphi \in \mathbf{L}$ asocia el número (entero no negativo) de conectivos binarios en la estructura sintáctica de φ :

1. **Base (At):** Si φ es atómica, $f(\varphi) = 0$

2. **Pasos recursivos:**

$$(\neg): f(\neg(\varphi)) = f(\varphi)$$

$$(\circ): f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2) + 1, \text{ para cierto conectivo } \circ \text{ y ciertas fórmulas } \varphi_1 \text{ y } \varphi_2.$$

Estas definiciones determinan la función f sobre todo $\mathbf{L}$.

4.4 Formalización del lenguaje natural

En esta sección se presentan algunos ejemplos de formalización del lenguaje natural. La formalización es una herramienta básica y el alumno tendrá ocasión de practicarla a lo largo de todo el estudio de la lógica proposicional y de predicados.

La tabla (4.2) ([C]) contiene algunos ejemplos de formalización de frase simples. A partir de la formalización de estos ejemplos podemos formalizar frases y razonamientos más complejos.

Para formalizar un razonamiento con premisas $p_1, p_2, \dots, p_n$ y conclusión q usaremos cualquiera de las dos formas:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline q \end{array} \quad \text{ o } \quad p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q.$$

Observación 4.4.1 *Una manera sencilla de verificar la validez de la formalización de una frase del lenguaje natural es de volver a traducir al lenguaje natural la formalización obtenida.*

Así, por ejemplo, consideremos la frase “No voy a la playa a menos que haga mucho calor.”

Siendo $p = \text{voy a la playa}$ y $q = \text{hace mucho calor}$, la formalización $(p \rightarrow q)$ es correcta y la formalización $(q \rightarrow p)$ no es correcta. En efecto, la primera se lee como “Voy a la playa sólo si hace mucho calor” y la segunda como “Si hace mucho calor, entonces voy a la playa.” En la segunda formalización se ha intercambiado la condición necesaria (la conclusión) con la suficiente (la premisa).

Ejemplos 4.4.2 1) El enunciado “Si una función f es derivable en el intervalo $[a, b]$, entonces f es continua en $[a, b]$,” se puede formalizar definiendo las fórmulas atómicas $p = \text{la función } f \text{ es derivable en } [a, b]$ y $q = \text{la función } f \text{ es continua en } [a, b]$ y aplicando el conectivo de implicación. Se obtiene $(p \rightarrow q)$ y, en forma abreviada, $p \rightarrow q$.

2) La frase “Si salto por la ventana, o me hago daño o empiezo a volar” se puede formalizar por medio de las proposiciones atómicas $p = \text{salto por la ventana}$, $q = \text{me hago daño}$, $r = \text{empiezo a volar}$ y los conectivos de implicación y de disyunción. Se obtiene $(p \rightarrow (q \vee r))$ y, en forma abreviada, $p \rightarrow (q \vee r)$.

3) La frase “Si salto por la ventana me podría hacer daño” se puede formalizar por medio de las proposiciones atómicas $p = \text{salto por la ventana}$, $q = \text{me podría hacer daño}$ y el conectivo de implicación. Se obtiene $(p \rightarrow q)$ y, en forma abreviada, $p \rightarrow q$.

4) El enunciado “Condición necesaria y suficiente para que un número entero n sea par es que n sea divisible por 2” se puede formalizar por medio de las proposiciones atómicas $p = n \text{ es un número entero}$, $q = n \text{ es par}$, $r = n \text{ es divisible por 2}$ y los conectivos de conjunción y doble implicación. Se obtiene $((p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r))$ y, en forma abreviada, $p \wedge q \leftrightarrow p \wedge r$.

5) Consideremos el razonamiento “Me gusta el helado de fresa, pero también el de limón. Si hay sólo helado de chocolate lo comeré, a pesar de que no me guste. Por tanto, no comeré helado de fresa.” Para formalizar el razonamiento dado, definimos las proposiciones atómicas $p = \text{me gusta el helado de fresa}$, $q = \text{me gusta el helado de limón}$, $r = \text{hay sólo helado de chocolate}$, $s = \text{comeré helado de chocolate}$, $t = \text{me gusta el helado de chocolate}$, $u = \text{comeré helado de fresa}$. La formalización se puede escribir, en forma abreviada, como:

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ (r \rightarrow s) \wedge \neg t \end{array}$$

$$\neg u$$

o como:

$$p \wedge q \wedge (r \rightarrow s) \wedge \neg t \rightarrow \neg u$$

Expresiones en el lenguaje natural	Formalización
no p es falso que p no es cierto p	$\neg p$
p y q p pero q p sin embargo q p no obstante q p a pesar de q	$p \wedge q$
o p o q o ambas cosas al menos p o q como mínimo p o q	$p \vee q$
si p entonces q p sólo si q q si p q es necesario para p p es suficiente para q no p a menos que q no p o q	$p \rightarrow q$
p si y sólo si q p es necesario y suficiente para q q es necesario y suficiente para p	$p \leftrightarrow q$ o $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Tabla 4.2: Tabla de formalización en la lógica proposicional

4.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.5.1 *Determina cuáles de las siguientes frases son proposiciones:*

- a) ¿Puedes ir a la cafetería?
- b) Por favor, sea educado.
- c) El jardín es muy grande.
- d) ¡La organización del evento es un desastre!
- e) ¡Échame una mano!

Ejercicio 4.5.2 *Identifica cuáles de las siguientes palabras no son fórmulas proposicionales o fórmulas proposicionales abreviadas:*

- a) $(p \rightarrow q) \wedge r) \vee (s \wedge t)$,
- b) $(\neg(\neg(\neg(p \wedge (q \rightarrow \neg(r))))))$,
- c) $\neg(p)$,
- d) $p \neg \wedge q$,
- e) $\neg p \vee q \vee s$.

Ejercicio 4.5.3 *Escribe en forma abreviada las siguientes fórmulas proposicionales:*

- a) $((p \rightarrow q) \wedge r) \vee (s \wedge t)$,
- b) $((p \rightarrow (q \vee r)) \wedge (((s \rightarrow t) \wedge r) \rightarrow q))$,
- c) $((\neg(p \wedge q) \leftrightarrow r) \vee s)$,
- d) $(\neg((\neg(p) \rightarrow q) \vee r))$,
- e) $(\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg(p) \wedge \neg(q)))$.

Ejercicio 4.5.4 *Escribe en forma no abreviada las siguientes fórmulas proposicionales:*

- a) $\neg r \rightarrow q \vee t \vee s$,
- b) $p \wedge q \wedge r \rightarrow s \rightarrow t$,
- c) $(p \wedge q) \vee (r \leftrightarrow s) \rightarrow p$,
- d) $\neg(\neg p \rightarrow q \vee r)$,
- e) $p \wedge (q \vee r) \rightarrow s \vee t$.

Ejercicio 4.5.5 *Representa en forma de árbol estructural las siguientes fórmulas:*

- a) $((p \vee q) \rightarrow r)$,
- b) $((p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q)))$,
- c) $(\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg(p) \wedge \neg(q)))$,
- d) $((\neg(\neg(\neg(p) \vee r) \vee q)) \rightarrow (\neg(p \wedge q) \vee r))$,
- e) $((p \vee r) \rightarrow (p \vee \neg(r))) \leftrightarrow (r \rightarrow p)$,
- f) $(p \rightarrow (s \rightarrow p))$.

Ejercicio 4.5.6 *Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales. Define la función f que a cada fórmula proposicional φ asocia el número de vértices internos (el número de vértices, distintos de la raíz, que no son hojas) de su árbol sintáctico.*

Ejercicio 4.5.7 La **profundidad** de una fórmula proposicional φ es la longitud máxima de los caminos simples con vértice inicial la raíz del árbol sintáctico de φ .

Usando el principio de recursión estructural, define la función fp que asigna a cada fórmula φ su profundidad.

Sugerencia: usa la función que calcula el máximo entre dos números enteros.

Ejercicio 4.5.8 [HLR] a) Usando el principio de recursión estructural, define recursivamente la función fn que asocia a cada fórmula φ el número (entero no negativo) de conectivos, sin contar los conectivos de aridad 0, que aparecen en la estructura sintáctica de φ .

b) Demuestra por inducción estructural que para toda fórmula φ se verifica que

$$fp(\varphi) \leq fn(\varphi),$$

donde la función fp es la función profundidad del ejercicio anterior.

En los siguientes ejercicios se pide formalizar los razonamientos dados en el contexto de la lógica proposicional. En cada caso, determinar las condiciones necesarias y las condiciones suficientes del razonamiento y volver a traducir al lenguaje natural la formalización obtenida:

Ejercicio 4.5.9 *Voy al bar siempre que me apetezca y tenga tiempo libre.*

Ejercicio 4.5.10 *No voy a correr a menos que tu vengas conmigo.*

Ejercicio 4.5.11 *Un número entero es primo sólo si no tiene divisores no triviales.*

Ejercicio 4.5.12 *Todos los alumnos estudian mucho y están alegres. Si los alumnos están alegres, entonces sacan buenas notas. Por tanto, los alumnos estudian mucho sólo si están alegres.*

Ejercicio 4.5.13 [C] *Si llueve las calles estarán vacías. Si las calles están vacías, el comercio obtiene pérdidas. Los músicos no podrían sobrevivir si los comerciantes no les contratasen para componer canciones para publicidad. Los comerciantes invierten en canciones publicitarias cuando tienen pérdidas. Por tanto, si llueve, los músicos pueden sobrevivir.*

Capítulo 5

Semántica de la lógica proposicional. Teoría interpretativa

En este capítulo vamos a estudiar la semántica y sus sistemas de demostración en la lógica proposicional. A continuación recordamos sus definiciones:

La **semántica** es la definición de un conjunto de significados (generalmente verdadero o falso) que se puedan asociar a una fórmula. Permite definir la validez de una fórmula o de un razonamiento.

Los **sistemas de demostración** son sistemas formales que permiten averiguar cuándo una fórmula o un razonamiento son válidos. En el contexto de la semántica se denominan **teoría interpretativa**.

Los sistemas de demostración se suelen dividir en dos clases: **sistemas directos** y **sistemas indirectos** (o por **refutación**). Los primeros aplican una cadena finita de reglas de inferencia hasta llegar a la fórmula que se quiere demostrar. Los segundos aplican la técnica de reducción al absurdo.

Como sistema de demostración directo estudiaremos las tablas de verdad y como sistema indirecto el método de los tableaux.

5.1 Valoraciones de un lenguaje formal

Recordamos que el conjunto Σ de los símbolos $p, q, r, s, t, \dots$ que representan las proposiciones atómicas de una fórmula se suele denominar **signatura**:

$$\Sigma = \{p, q, r, s, t, \dots\}.$$

Definición 5.1.1 Sea L el lenguaje de la lógica proposicional. Una **valoración del lenguaje L** es cualquier función

$$v : \Sigma \longrightarrow \{0, 1\}$$

de la signatura Σ al conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$. El símbolo 0 representa el valor “falsedad” y el símbolo 1 el valor “verdad”.

Ejemplo 5.1.2 Si $\Sigma = \{p, q\}$, podemos representar las cuatro posibles valoraciones de Σ :

$\Sigma \rightarrow \{0, 1\}$	$\Sigma \rightarrow \{0, 1\}$	$\Sigma \rightarrow \{0, 1\}$	$\Sigma \rightarrow \{0, 1\}$
$p \rightarrow 0$	$p \rightarrow 0$	$p \rightarrow 1$	$p \rightarrow 1$
$q \rightarrow 0$	$q \rightarrow 1$	$q \rightarrow 0$	$q \rightarrow 1$

por medio de las filas de la tabla a). De forma similar, si $\Sigma = \{p, q, r\}$, podemos representar las ocho posibles valoraciones de Σ por medio de las filas de la tabla b).

a)

p	q
0	0
0	1
1	0
1	1

b)

p	q	r
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Observación 5.1.3 Usando una demostración por inducción se puede verificar que si Σ contiene n elementos, entonces hay 2^n posibles valoraciones de Σ .

5.2 Evaluación semántica de fórmulas

Dada una valoración $v : \Sigma \rightarrow \{0, 1\}$ nos interesa extender su definición a todas las fórmulas proposicionales definidas a partir de las proposiciones atómicas de Σ . Esto no permitirá establecer los **valores de verdad (veritativos)** de esas fórmulas. Como es de esperar, la definición de la extensión de una valoración tiene carácter recursivo.

Nota: En lo que se sigue usaremos la forma abreviada para las fórmulas proposicionales.

Como primer paso tenemos que definir, para toda valoración $v : \Sigma \rightarrow \{0, 1\}$, los valores que toman los conectivos lógicos.

Valores de verdad de los conectivos lógicos

($\neg$): Los valores de verdad del conectivo lógico negación, $v_{\neg p}$, residen en que la fórmula $\neg p$ es verdadera si y sólo si p es falsa y, recíprocamente, que $\neg p$ es falsa si y sólo si p es verdadera. Los valores de verdad $v_{\neg p}$ correspondientes al conectivo $\neg$ se representan en la tercera columna de la tabla (5.1).

Ejemplo 5.2.1 Sea $p = \text{Luis tiene 18 años}$. Entonces $\neg p = \text{Luis no tiene 18 años}$ es verdadera si es falso que Luis tiene 18 años y es falsa si Luis los tiene.

- ($\wedge$): La fórmula $p \wedge q$ (p y q) es verdadera si y sólo si p y q son verdaderas simultáneamente. Los valores de verdad $v_{p \wedge q}$ correspondientes a este conectivo se representan en la cuarta columna de la tabla (5.1).

Ejemplo 5.2.2 Sean $p = \text{Luis tiene 18 años}$ y $q = \text{Maria es española}$. Entonces $p \wedge q = \text{Luis tiene 18 años y Maria es española}$ es verdadera sólo si es verdadero que Luis tiene 18 y es también verdadero que Maria es española.

- ($\vee$): La fórmula $p \vee q$ (p ó q), es verdadera si y sólo si p es verdadera o q es verdadera o ambas p y q son verdaderas. Los valores de verdad $v_{p \vee q}$ correspondientes a este conectivo se representan en la quinta columna de la tabla (5.1).

Ejemplo 5.2.3 Sean $p = \text{Luis tiene 18 años}$ y $q = \text{Maria es española}$. Entonces $p \vee q = \text{Luis tiene 18 años ó Maria es española}$ es falsa sólo si es falso que Luis tiene 18 y es también falso que Maria es española.

- ($\rightarrow$): Para establecer el significado de la fórmula $p \rightarrow q$ (p implica q), debemos tener presente que en lenguaje natural este enunciado encierra una relación de causalidad, que no siempre aparece al utilizar este conectivo en el ámbito formal.

En el lenguaje matemático, p implica q quiere decir que si p es verdadera, necesariamente q es verdadera, o lo que es lo mismo, que es imposible que q sea falsa si p es verdadera. Por tanto el único caso en el cual $p \rightarrow q$ puede ser falsa es si p es verdadera y q es falsa.

Las fórmulas atómicas p y q son, respectivamente, el **antecedente** o **premisa** y el **consecuente** o **conclusión** de la fórmula $p \rightarrow q$.

La fórmula $q \rightarrow p$ se denomina **sentencia recíproca** de la sentencia $p \rightarrow q$, y la sentencia $\neg q \rightarrow \neg p$ **sentencia contrarrecíproca** de la sentencia $p \rightarrow q$.

Los valores de verdad $v_{p \rightarrow q}$ correspondientes al conectivo $p \rightarrow q$ se representan en la sexta columna de la tabla (5.1).

Ejemplo 5.2.4 Sean $p = \text{Luis tiene 18 años}$ y $q = \text{Maria es española}$. Entonces $p \rightarrow q$ es falsa sólo si es verdadero que Luis tiene 18 y es falso que Maria es española.

($\leftrightarrow$): La fórmula $p \leftrightarrow q$ (p si y sólo si q) es verdadera cuando p y q tienen el mismo valor de verdad. Los valores de verdad $v_{p \leftrightarrow q}$ correspondientes al conectivo $p \leftrightarrow q$ se representan en la última columna de la tabla (5.1).

Ejemplo 5.2.5 Sean $p = \text{Luis tiene 18 años}$ y $q = \text{Maria es española}$. Entonces $p \leftrightarrow q$ es falsa si es verdadero que Luis tiene 18 y es falso que Maria es española o si es falso que Luis tiene 18 y es verdadero que Maria es española.

p	q	$v_{\neg p}$	$v_{p \wedge q}$	$v_{p \vee q}$	$v_{p \rightarrow q}$	$v_{p \leftrightarrow q}$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Tabla 5.1: Valores de verdad de los conectivos

5.2.1 Tablas de verdad

Definidos los valores de verdad de los conectivos de la lógica proposicional, el principio de recursión estructural nos permite extender una valoración a todas las fórmulas proposicionales. En efecto, se trata de extender a toda fórmula proposicional la función valoración $v : \Sigma \longrightarrow \{0, 1\}$, respetando las definiciones de los valores de verdad de los conectivos lógicos establecidos en el anterior párrafo.

Además, la unicidad de la estructura sintáctica de cada fórmula proposicional nos garantiza que la extensión que vamos a obtener es única.

Definición 5.2.6 Dada una valoración $v : \Sigma \longrightarrow \{0, 1\}$, se asocia a cada fórmula proposicional φ un único valor de verdad $(\varphi)^v \in \{0, 1\}$ de la siguiente forma:

Definición recursiva de una valoración

(At): $(\top)^v = 1, \quad (\perp)^v = 0 \quad y$

$(p)^v = v(p)$ para toda proposición atómica p .

($\neg$): Si φ es una fórmula entonces $(\neg(\varphi))^v = v_{\neg}(\varphi)$.

($\circ$): Si φ y ψ son dos fórmulas entonces $(\varphi \circ \psi)^v = v_{\varphi \circ \psi}(\varphi \circ \psi)$.

Construcción de una tabla de verdad

La **tabla de verdad** de una fórmula proposicional φ es una forma de representar todos los posibles valores de verdad que φ puede tomar en todas las posibles valoraciones de las proposiciones atómicas de su signatura.

La construcción de la tabla de verdad de una fórmula φ está basada en la definición recursiva de la valoración de φ . Por tanto, necesitamos seguir varios pasos para completarla:

Paso 1: Tenemos que identificar las proposiciones atómicas y los pasos que se han seguido para construir φ . Para eso podemos usar el árbol estructural de φ .

Ejemplo 5.2.7 *Volvamos a considerar la fórmula*

$$\varphi = ((p \wedge (p \rightarrow r)) \vee (q \leftrightarrow t))$$

y la figura (5.1).

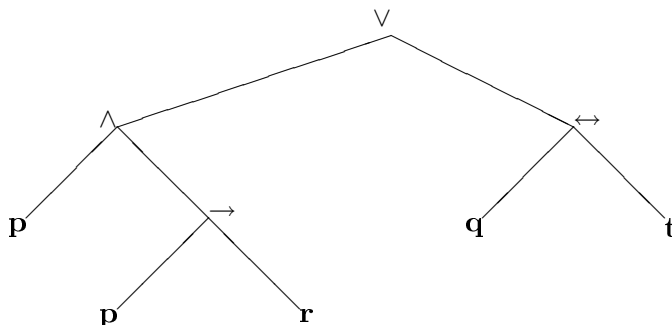


Figura 5.1: Árbol estructural de $\varphi = ((p \wedge (p \rightarrow r)) \vee (q \leftrightarrow t))$

Las proposiciones atómicas son p , q , r y t y la construcción de φ se obtiene leyendo su árbol de abajo hacia arriba.

Paso 2: Siguiendo el orden de construcción de φ se escribe la primera fila de su tabla de verdad.

Para nuestro ejemplo se obtiene:

p	q	r	t	$p \rightarrow r$	$p \wedge (p \rightarrow r)$	$q \leftrightarrow t$	$(p \wedge (p \rightarrow r)) \vee (q \leftrightarrow t)$
-----	-----	-----	-----	-------------------	------------------------------	-----------------------	---

Paso 3: Se rellenan las columnas que se corresponden a las proposiciones atómicas con todas sus posibles valoraciones.

Para nuestro ejemplo serían las primeras cuatro columnas de la tabla (5.2), que contiene $2^4 + 1 = 17$ filas.

p	q	r	t	$p \rightarrow r$	$p \wedge (p \rightarrow r)$	$q \leftrightarrow t$	$(p \wedge (p \rightarrow r)) \vee (q \leftrightarrow t)$
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 5.2: Tabla de verdad de $\varphi = (p \wedge (p \rightarrow r)) \vee (q \leftrightarrow t)$.

Paso 4: Se rellenan todas las columnas siguiendo las valoraciones de los conectivos lógicos de la tabla (5.1) y, en cada fila, las valoraciones de las proposiciones atómicas.

Para nuestro ejemplo se obtiene la tabla de verdad (5.2).

5.3 Modelos y contraejemplos de una fórmula. Tautologías, contingencias y contradicciones

La posibilidad de valorar fórmulas proposicionales nos permite definir las siguientes nociones fundamentales.

Definición 5.3.1 *Se dice que una fórmula φ es satisfacible bajo una valoración v (o que v es un **modelo** de φ) cuando se verifica que*

$$(\varphi)^v = 1.$$

Si φ es satisfacible bajo v se emplea la notación $v \models \varphi$.

Ejemplo 5.3.2 En la tabla de verdad de la tabla (5.2), las valoraciones

$\Sigma \rightarrow \{0, 1\}$		$\Sigma \rightarrow \{0, 1\}$
$p \rightarrow 0$		$p \rightarrow 0$
$q \rightarrow 0$	y	$q \rightarrow 0$
$r \rightarrow 0$		$r \rightarrow 1$
$s \rightarrow 0$		$s \rightarrow 0$

son dos de los diez posibles modelos de la fórmula $\varphi = (p \wedge (p \rightarrow r)) \vee (q \leftrightarrow t)$.

Definición 5.3.3 Se dice que una valoración v es un **contraejemplo** de una fórmula φ cuando se verifica que $(\varphi)^v = 0$.

Ejemplo 5.3.4 En la tabla de verdad de la tabla (5.2), las valoraciones

$\Sigma \rightarrow \{0, 1\}$		$\Sigma \rightarrow \{0, 1\}$
$p \rightarrow 0$		$p \rightarrow 0$
$q \rightarrow 0$	y	$q \rightarrow 0$
$r \rightarrow 0$		$r \rightarrow 1$
$s \rightarrow 1$		$s \rightarrow 1$

son dos de los seis posibles contraejemplos de la fórmula $\varphi = (p \wedge (p \rightarrow r)) \vee (q \leftrightarrow t)$.

Definición 5.3.5 Se dice que una fórmula φ es **satisfacible** cuando es satisfacible bajo alguna valoración v . En caso contrario se dice que es **insatisfacible**.

Ejemplo 5.3.6 La fórmula $\varphi = p \wedge \neg p$ es insatisfacible, ya que p y $\neg p$ no pueden ser verdaderos a la vez.

Observación 5.3.7 Las definiciones anteriores se pueden extender a un conjunto de fórmulas $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ pidiendo que la satisfacibilidad de Φ sea la satisfacibilidad simultánea de todas las fórmulas que lo definen.

Entonces,

- 1) Φ es satisfacible si y sólo si $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ es satisfacible.
- 2) Φ es insatisfacible si y sólo si $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ es insatisfacible.

Ejemplo 5.3.8 Sea $v(p) = 0$, $v(q) = 1$, $v(r) = 1$ una valoración del conjunto $\{p, q, r\}$.

Entonces v es un modelo del conjunto de dos fórmulas $\Phi_1 = \{(p \rightarrow q) \wedge r, q \wedge r\}$ y es un contraejemplo del conjunto $\Phi_2 = \{p \wedge (q \rightarrow r), q \wedge r\}$.

Definición 5.3.9 Sea φ una fórmula proposicional construida a partir de un conjunto $\Sigma = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ de proposiciones atómicas.

1. Se dice que la fórmula φ es **lógicamente válida** o una **tautología** cuando es verdadera bajo cualquier valoración, es decir, si $v \models \varphi$ para toda valoración v de Σ .
2. Se dice que φ es una **contradicción** cuando es falsa bajo cualquier valoración, es decir, si toda valoración v de Σ es un contraejemplo de φ . Por tanto una contradicción es una fórmula insatisfacible.
3. Se dice que φ es una **contingencia** cuando entre las valoraciones de Σ existen al menos un modelo y al menos un contraejemplo de φ .

Ejemplos 5.3.10 1) Por definición,

$\top$ es una tautología y
 $\perp$ es una contradicción.

2) Para toda fórmula φ ,

$\varphi \vee \neg\varphi$ es una tautología (ley del tercio excluso) y
 $\varphi \wedge \neg\varphi$ es una contradicción.

3) Usando una tabla de verdad se puede verificar que vale la ley conmutativa para el conectivo $\wedge$, es decir, que

$$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$$

es una fórmula lógicamente válida.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

4) La tabla de verdad (5.2) de $\varphi = (p \wedge (p \rightarrow r)) \vee (q \leftrightarrow t)$ nos indica que φ es una contingencia.

5.4 Evaluación semántica de deducciones. Consecuencia lógica

Otro concepto fundamental que vamos a definir es el concepto de consecuencia lógica.

Definición 5.4.1 Se dice que una fórmula φ es **consecuencia lógica** de un conjunto finito de fórmulas $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ si todo modelo v del conjunto Φ es un modelo de la fórmula φ , es decir, si

$$v \models \Phi \quad \text{implica que} \quad v \models \varphi.$$

Si φ es consecuencia lógica de Φ también se dice que Φ **implica lógicamente** a φ y se escribe

$$\Phi \models \varphi.$$

Ejemplo 5.4.2 La tabla (5.3) contiene algunos importantes ejemplos de implicaciones lógicas (ver ejercicio (5.7.4)).

Definición 5.4.3 Sean $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ un conjunto finito de fórmulas proposicionales y φ una fórmula. Se define **deducción** o **razonamiento** a la fórmula

$$((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi).$$

Para distinguir las premisas del conjunto Φ de la conclusión φ , un razonamiento se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \hline \varphi \end{array}$$

Observación 5.4.4 Decir que $((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi)$ es una tautología significa que es imposible que las fórmulas de Φ tengan todas el valor de verdad 1 y φ tenga valor 0. Por tanto $((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi)$ es una tautología si y sólo si Φ implica lógicamente a φ .

Por el otro lado, una fórmula φ es siempre consecuencia lógica de un cualquier conjunto de fórmulas Φ insatisfacible.

Definición 5.4.5 Se dice que el razonamiento anterior es **correcto** o **lógicamente válido** si

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \models \varphi,$$

es decir, si el conjunto Φ de las **premisas** o **hipótesis** del razonamiento implica lógicamente a la **conclusión** o **tesis** φ .

Observación 5.4.6 Observar que, según la definición anterior, un razonamiento

$$((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi)$$

es correcto si y sólo si es una tautología.

$\neg\neg p \models p,$	Ley de la doble negación
$(p \wedge q) \models p$ $p \models (p \vee q)$	Leyes de simplificación
$(p \rightarrow q) \models (\neg q \rightarrow \neg p)$	Ley de contraposición
$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \models (p \rightarrow r)$	Ley transitiva de $\rightarrow$
$((p \wedge q) \rightarrow r) \models (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	Ley de exportación
$(p \wedge (p \rightarrow q)) \models q$	Modus ponens
$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \models \neg p$	Modus tolens

Tabla 5.3: Tabla de algunas implicaciones lógicas

Ejemplos 5.4.7 1) *El razonamiento (Modus ponens)*

$$\frac{p \quad p \rightarrow q}{q}$$

es válido ya que $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ es una tautología.

2) *Todas las implicaciones de la tabla (5.3) son razonamientos correctos.*

5.5 Equivalencia de fórmulas

En este apartado vamos a estudiar el concepto de equivalencia lógica entre fórmulas. Veremos que la equivalencia de fórmulas es una relación binaria de equivalencia en el sentido de las definiciones del capítulo (3). Por tanto, dos fórmulas equivalentes pertenecen a una misma clase de equivalencia lógica.

Definición 5.5.1 Sean φ y ψ dos fórmulas proposicionales. Se dice que φ **equivale lógicamente** a ψ si la fórmula proposicional $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ es una tautología. Si φ y ψ son equivalentes se escribe $\varphi \equiv \psi$.

Observación 5.5.2 Se sigue de la definición que si φ y ψ son dos fórmulas equivalentes, entonces **tienen los mismos valores de verdad bajo una cualquier valoración.**

Ejemplo 5.5.3 Vamos a verificar la siguiente importante equivalencia lógica, llamada **interdefinición**:

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q).$$

El único caso en el cual $(p \rightarrow q)$ es falsa es cuando p es verdadera y q es falsa.

$\varphi \wedge \top \equiv \varphi$ $\varphi \wedge \perp \equiv \perp$ $\varphi \vee \top \equiv \top$ $\varphi \vee \perp \equiv \varphi$	Leyes de Identidad
$\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \perp$	No contradicción
$\varphi \vee \neg\varphi \equiv \top$	Tercio excluso
$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ $\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$	Idempotencia
$\varphi_1 \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \varphi_1$ $\varphi_1 \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \varphi_1$	Absorción
$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \varphi_2 \wedge \varphi_1$ $\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \varphi_2 \vee \varphi_1$ $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \equiv (\varphi_2 \leftrightarrow \varphi_1)$	Conmutatividad
$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 \equiv \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$ $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3 \equiv \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$	Asociatividad
$\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$ $\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$ $\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \rightarrow \varphi_3)$ $\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \vee (\varphi_1 \rightarrow \varphi_3)$ $\varphi_1 \leftrightarrow (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_3)$ $\varphi_1 \leftrightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \vee (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_3)$	Distributividad
$\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$	Doble negación
$(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_2 \rightarrow \neg\varphi_1)$	Ley de contraposición
$\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2$ $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$	Leyes de De Morgan

Tabla 5.4: Tabla de algunas equivalencias lógicas

El único caso en el cual $(\neg p \vee q)$ es falsa es si $\neg p$ es falsa y q es falsa. Esto es, el caso p verdadera y q falsa.

Ya que las dos fórmulas toman los mismos valores de verdad bajo una cualquier valoración, se sigue la equivalencia lógica de las dos fórmulas.

Observación 5.5.4 *Recordamos que una relación binaria R sobre un conjunto no vacío A se dice de equivalencia si es:*

Reflexiva: para todo elemento a del conjunto A , $R(a, a)$ es verdadera,

Simétrica: para todo par a y b de elementos de A ,

$R(a, b) \rightarrow R(b, a)$ es verdadera.

Transitiva: para toda terna a , b y c de elementos de A ,

$(R(a, b) \wedge R(b, c)) \rightarrow R(a, c)$ es verdadera.

En el ejercicio (5.7.8) se pide demostrar que en el conjunto $\mathbf{L}$ de las fórmulas bien construidas, la relación

$$\varphi \equiv \psi \quad \text{si y sólo si} \quad (\varphi \leftrightarrow \psi \quad \text{es una tautología})$$

es una relación de equivalencia.

A continuación vamos a ver como se comporta la relación de equivalencia lógica entre fórmulas proposicionales respecto a sus subfórmulas.

Definición 5.5.5 Supongamos que ψ_1 sea una subfórmula de una fórmula φ . Si ψ_2 es una fórmula, indicaremos con el símbolo $\varphi[\psi_1/\psi_2]$ a la nueva fórmula que se obtiene substituyendo (reemplazando) cada ocurrencia de la fórmula ψ_1 en φ por la fórmula ψ_2 .

Ejemplo 5.5.6 Sea $\varphi = (p \rightarrow q) \wedge (r \vee (p \rightarrow q))$ y sea $\psi_1 = p \rightarrow q$. Se puede observar que ψ_1 es una subfórmula de φ . Sea ahora $\psi_2 = \neg p \vee q$. Sustituyendo ψ_1 por ψ_2 en φ , se obtiene la nueva fórmula

$$\varphi[\psi_1/\psi_2] = (\neg p \vee q) \wedge (r \vee (\neg p \vee q)).$$

Teorema 5.5.7 (Teorema de sustitución, [BA]) Sea ψ_1 una subfórmula de φ . Si ψ_2 es una fórmula tal que $\psi_1 \equiv \psi_2$, entonces $\varphi[\psi_1/\psi_2] \equiv \varphi$.

Ejemplo 5.5.8 Sean $\varphi = (p \rightarrow q) \wedge (r \vee (p \rightarrow q))$, $\psi_1 = p \rightarrow q$ y $\psi_2 = \neg p \vee q$ las fórmulas proposicionales del ejemplo 5.5.6. Sabemos que $\psi_1 \equiv \psi_2$ por interdefinición. Por lo tanto, substituyendo ψ_1 por ψ_2 en φ , se obtiene la nueva fórmula

$$\varphi[\psi_1/\psi_2] = (\neg p \vee q) \wedge (r \vee (\neg p \vee q)),$$

que, por el teorema de sustitución, es equivalente a la fórmula φ .

La tabla (5.4) contiene una lista de las equivalencias lógicas más utilizadas (ver ejercicio (5.7.9)).

5.6 Métodos de refutación. Tableaux

5.6.1 Refutación

Los métodos de demostración por refutación pertenecen a los sistemas de demostración indirectos que, como ya comentamos, son más modernos que los métodos de demostración axiomáticos y más adecuados para su automatización. Estos métodos nos proporcionan así una nueva forma de verificar la validez de fórmulas y de razonamientos.

Un ejemplo de sistema de demostración por refutación es la teoría de los tableaux, que vamos a estudiar en las siguientes secciones.

El alumno estudiará el método de demostración por refutación llamado *resolución proposicional* en la asignatura de Lógica Informática.

Vamos ahora a ver cómo se pueden emplear métodos indirectos para verificar la validez de una fórmula o de un razonamiento.

Procedimiento por reducción al absurdo de demostración de la validez de una fórmula φ .

Recordemos que una fórmula φ es una tautología si y sólo si su negación $\neg\varphi$ es una contradicción (insatisfacible).

Si queremos usar un método de reducción al absurdo (o refutación) para demostrar una fórmula φ es una tautología, tenemos que suponer que su negación $\neg\varphi$ no sea una contradicción (es decir, que tenga al menos un modelo) y llegar a una conclusión absurda (una contradicción).

Si nuestro método funciona, podemos refutar $\neg\varphi$ y afirmar la validez de φ .

Ejemplo 5.6.1 *Si queremos demostrar que la fórmula*

$$\varphi : \neg(p \wedge (p \vee q)) \vee p$$

es una tautología, podemos usar un razonamiento por reducción al absurdo. Se trata de suponer que exista un modelo para $\neg\varphi \equiv (p \wedge (p \vee q)) \wedge \neg p$ y llegar a un absurdo.

Ahora, $\neg\varphi \equiv (p \wedge (p \vee q)) \wedge \neg p$ es verdadera si y sólo si $p \wedge (p \vee q)$ y $\neg p$ son verdaderas. De la primera condición se deduce que p es verdadera y de la segunda que p es falsa. Así que p tendría que ser verdadera y falsa al mismo tiempo y esto es imposible.

Procedimiento por reducción al absurdo de demostración de la validez de un razonamiento.

El siguiente teorema afirma que la deducción $\Phi \rightarrow \varphi$ es una tautología (una implicación lógica) si y sólo si no pueden ser simultáneamente verdaderas todas sus premisas y la negación de su conclusión:

Teorema 5.6.2 [HLR] *Sean $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ un conjunto finito de fórmulas proposicionales y φ una fórmula. Entonces las siguientes son equivalentes:*

- *$((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi)$ es una **fórmula válida** (una tautología, un razonamiento válido).*
- *$((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \wedge \neg(\varphi))$ es una **contradicción** (Reducción al absurdo).*

Observación 5.6.3 *Se puede notar que, por interdefinición, la fórmula*

$$((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi)$$

es equivalente a la fórmula

$$(\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \vee \varphi).$$

Por tanto, su negación es equivalente a la fórmula

$$((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \wedge \neg(\varphi)).$$

Se sigue que el teorema 5.6.2 afirma que el razonamiento $((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi)$ es válido (es una tautología) si y sólo si su negación $((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \wedge \neg(\varphi))$ es insatisfacible (una contradicción). Simplemente se está aplicando el método de reducción al absurdo para demostrar la validez de la fórmula $((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi)$, que es un razonamiento.

Ejemplo 5.6.4 Por definición de implicación lógica, para verificar que

$$p \models (q \rightarrow p),$$

hace falta demostrar que la fórmula

$$(p \rightarrow (q \rightarrow p))$$

es una tautología.

Aplicando el teorema (5.6.2) (el método de refutación), es suficiente verificar que la fórmula

$$p \wedge \neg(q \rightarrow p)$$

es insatisfacible (es una contradicción).

Para toda valoración tal que $\neg(q \rightarrow p)$ es falsa, $p \wedge \neg(q \rightarrow p)$ es falsa. Si una valoración es tal que $\neg(q \rightarrow p)$ es verdadera, entonces $(q \rightarrow p)$ es falsa, es decir, tiene que ser q verdadera y p falsa. También en este caso nuestra fórmula $p \wedge \neg(q \rightarrow p)$ resultaría ser falsa. Se sigue que $p \wedge \neg(q \rightarrow p)$ no admite ningún modelo y, por tanto, es insatisfacible.

5.6.2 Definición de los tableaux

En esta sección presentaremos la teoría de los tableaux por medio de una definición semántica.

Durante el estudio de los tableaux semánticos descubriremos que la verdadera naturaleza de las reglas que los definen es sintáctica y que, por tanto, la presentación semántica (y no sintáctica) de la teoría de los tableaux tiene su justificación en su mayor simplicidad y claridad.

Los **tableaux semánticos** se basan sobre el método de reducción al absurdo y son un procedimiento sistemático para verificar si una fórmula es insatisfacible.

Dada una implicación $\varphi \rightarrow \psi$, su negación $\varphi \wedge \neg\psi$ es insatisfacible si y sólo si $\varphi \rightarrow \psi$ es una implicación lógica.

Más en general, si una fórmula es insatisfacible, su negación es una tautología y, por tanto, un tableau permite averiguar si una fórmula es lógicamente válida.

Además, en muchos casos los tableaux son más eficientes que las tablas de verdad (donde para una signatura formado por n proposiciones atómicas tenemos 2^n posibles valoraciones), proporcionan una teoría para programar herramientas de demostración automática y tienen una extensión natural a la lógica de predicados de primer orden.

Estudiaremos otras dos aplicaciones de la teoría de los tableaux semánticos: la clasificación de fórmulas proposicionales en insatisfacibles, tautologías o contingencias y la obtención de sus formas normales conjuntivas o disyuntivas.

La principales referencias utilizadas para la siguiente descripción de la teoría de tableaux son [HLR] y [MH].

Formas conjuntivas y disyuntivas

Antes de poder definir la teoría de los tableaux semánticos, necesitamos profundizar en el análisis semánticos de las fórmulas proposicionales.

En el ejercicio (5.7.11) se pide demostrar que toda fórmula proposicional es equivalente a otra donde intervienen sólo los conectivos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$.

Esta propiedad se suele expresar diciendo que el conjunto $\{\neg, \wedge, \vee\}$ es un conjunto **adecuado** de conectivos para la lógica proposicional.

El anterior resultado justifica las siguientes definiciones, que nos permiten clasificar más fácilmente las fórmulas proposicionales:

Definición 5.6.5 (Fórmulas conjuntivas y disyuntivas)

*Si una fórmula proposicional α es equivalente a una conjunción de otras dos fórmulas más sencillas, $\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$, diremos que es una **fórmula conjuntiva** (de la categoría α).*

*Si una fórmula proposicional β es equivalente a una disyunción de otras dos fórmulas más sencillas, $\beta \equiv \beta_1 \vee \beta_2$, diremos que es una **fórmula disyuntiva** (de la categoría β).*

*Si una fórmula proposicional σ es del tipo $\neg\top$, $\neg\perp$ o $\neg\neg\varphi$ diremos que es **simplificable** (de la categoría σ) y su forma simplificada es σ_1 , que es igual a $\perp$, $\top$ o φ , respectivamente.*

*Las fórmulas conjuntivas, disyuntivas y simplificables se llaman **fórmulas reducibles**.*

Usando las equivalencias lógicas estudiadas, podemos recoger en la tabla (5.5) todas las posibles fórmulas conjuntivas, disyuntivas y simplificables.

Usando árboles con raíz, podemos ahora representar las fórmulas reducibles de la tabla (5.5) por medio del esquema de la tabla (5.6).

La tabla (5.6) se puede interpretar de la siguiente manera:

- Una fórmula conjuntiva $\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$, puede ser verdadera sólo en un caso: sus dos fórmulas componentes α_1 y α_2 tienen que ser verdaderas a la vez.

Fórmulas conjuntivas			Fórmulas disyuntivas		
α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	φ	ψ
$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	φ	$\neg\psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi$	ψ
$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\psi \rightarrow \varphi$	$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$	$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	$\neg(\psi \rightarrow \varphi)$

Fórmulas simplificables	
σ	σ_1
$\neg\top$	$\perp$
$\neg\perp$	$\top$
$\neg\neg\varphi$	φ

Tabla 5.5: Fórmulas reducibles

- Una fórmula disyuntiva $\beta \equiv \beta_1 \vee \beta_2$, es verdadera en dos casos: si β_1 es verdadera o si β_2 es verdadera.
- Una fórmula simplificable $\sigma \equiv \sigma_1$ es verdadera sólo en un caso: σ_1 tiene que ser verdadera.

Por tanto, las fórmulas α , β y σ que aparecen como etiquetas de las raíces de los árboles de la tabla (5.6) tendrán valor 1 si asignamos valor 1 a las fórmulas que ocupan los demás vértices.

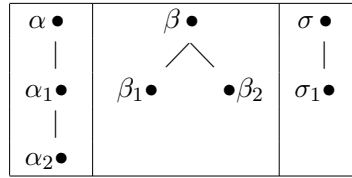


Tabla 5.6: Esquema de reducción de fórmulas

Observación 5.6.6 *El hecho de que toda fórmula proposicional es equivalente a otra donde intervienen sólo los conectivos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ implica que toda fórmula proposicional es equivalente a una fórmula conjuntiva, a una fórmula disyuntiva o es simplificable.*

Ejemplo 5.6.7 *Sea*

$$\varphi \rightarrow (\psi \leftrightarrow \chi)$$

la fórmula proposicional que se quiere reducir. La regla de interdefinición nos permite reescribir nuestra fórmula de forma equivalente como una fórmula disyuntiva

$$\beta \equiv \neg\varphi \vee (\psi \leftrightarrow \chi),$$

donde

$$\beta_1 : \neg\varphi \quad y \quad \beta_2 : (\psi \leftrightarrow \chi).$$

Tableaux semánticos

Dado un conjunto finito de fórmulas proposicionales Φ , queremos asociar a este conjunto un árbol con raíz que nos permita determinar fácilmente propiedades semánticas del conjunto Φ . Este árbol será el tableau asociado a Φ .

En el capítulo 4 introducimos el concepto de árbol con raíz y sus propiedades básicas. En este capítulo necesitamos ampliar un poco más la terminología ya introducida.

Definición 5.6.8 1) Recordemos que una **rama** de un árbol con raíz es un cualquier camino simple que no pueda prolongarse a otro más largo.

2) Un árbol con raíz es **binario** si todos sus vértices no tienen más que dos hijos.

3) Un **árbol de fórmulas** T es cualquier árbol con raíz binario que tenga asociada a cada uno de sus vértices una fórmula proposicional (cada uno de sus vértices está etiquetado por una fórmula proposicional).

4) Una rama θ de un árbol de fórmulas T se dice **cerrada** si $\perp$ aparece en θ , o si ambas fórmulas φ y $\neg\varphi$ aparecen en θ .

5) Una rama θ de un árbol de fórmulas T se dice **abierta** si no es cerrada.

Antes de definir formalmente el método de los tableaux, vamos a ver un ejemplo de como se construye un tableau asociado a un razonamiento.

Ejemplo 5.6.9 (Ejemplo de construcción de un tableau asociado a un razonamiento)

Consideramos el razonamiento:

1) Si quiero comer fruta y hay una frutería cerca, entonces soy feliz.

2) No soy feliz.

3) Quiero comer fruta.

Por tanto,

4) No hay una frutería cerca.

Sean p = quiero comer fruta, q = hay una frutería cerca y r = soy feliz.

El razonamiento anterior será válido si

$$\{p \wedge q \rightarrow r, \neg r, p\} \models \neg q.$$

Ya que los tableaux usan el método de refutación, podemos afirmar la validez del razonamiento anterior si demostramos que la fórmula

$$(p \wedge q \rightarrow r) \wedge \neg r \wedge p \wedge \neg \neg q$$

es una contradicción.

De forma equivalente, tenemos que verificar que el conjunto de fórmulas

$$\Phi = \{p \wedge q \rightarrow r, \neg r, p, \neg \neg q\}$$

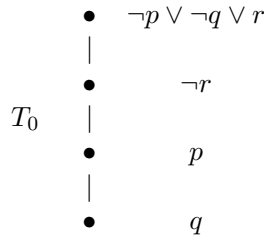
es insatisfacible.

Teniendo en cuenta los esquemas de reducción de fórmulas de la tabla 5.6, conviene transformar las fórmulas de Φ en fórmulas equivalentes, que contengan sólo conectivos del conjunto $\{\neg, \wedge, \vee\}$:

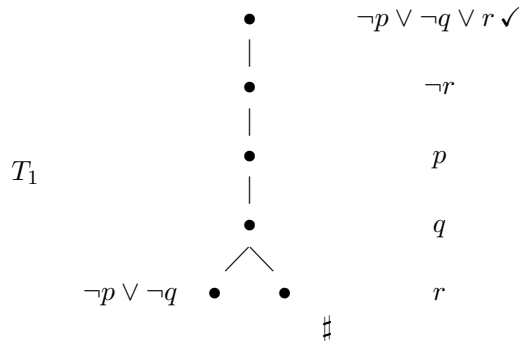
$$p \wedge q \rightarrow r \equiv \neg(p \wedge q) \vee r \equiv \neg p \vee \neg q \vee r,$$

$$\neg \neg q \equiv q.$$

Ahora empezamos a construir un árbol de fórmulas T_0 con la **regla de inicialización** que consiste en dibujar un primer árbol con una única rama cuyos vértices están etiquetados por las fórmulas de nuestro conjunto Φ . T_0 es nuestro tableau inicial:

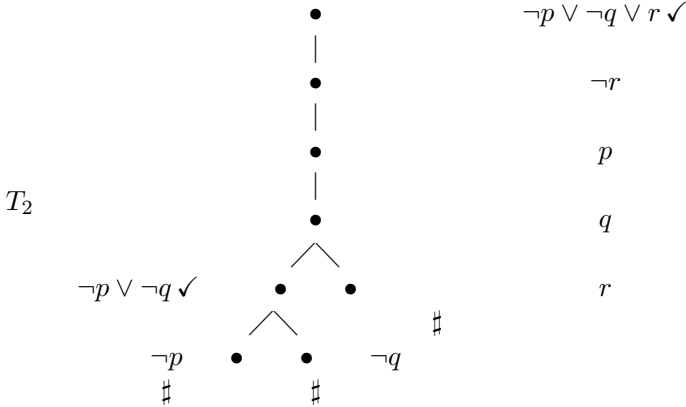


Ahora intentamos simplificar las fórmulas anteriores usando el esquema de la tabla (5.6) y obtenemos un nuevo tableau T_1 , que es una extensión del anterior. En T_1 , marcamos con el símbolo $\checkmark$ las fórmulas que hemos reducido y **cerramos** con el símbolo $\#$ aquellas ramas que contienen un conjunto de fórmulas insatisfacible:



Hemos cerrado la rama derecha de T_1 que contiene las fórmulas $\neg r$ y r , ya que esto quiere decir que el conjunto de fórmulas $\{\neg r, p, \neg \neg q, r\}$ (todas las que aparecen en esta rama, eliminando las que llevan el símbolo $\checkmark$) es insatisfacible.

Ahora, usando su rama izquierda, podemos extender T_1 a un nuevo árbol T_2 :



Las tres ramas de este último árbol están cerradas ya que cada una de ellas contiene una contradicción: la primera contiene el conjunto $\{p, \neg p\}$, la segunda el conjunto $\{q, \neg q\}$ y la tercera el conjunto $\{\neg r, r\}$.

Veremos que, en el caso de obtener sólo ramas cerradas, se podrá deducir que el conjunto Φ es insatisfacible: no es posible asignar valores de verdad 1 a las fórmulas que aparecen como etiquetas del árbol T_2 sin caer en una contradicción. Por tanto, nuestro razonamiento inicial es válido.

Podemos observar que el cálculo de la tabla de verdad para este ejemplo requiere considerar 8 posibles valoraciones, mientras el tableau estudiado tiene sólo 3 ramas.

Vamos entonces a definir los tableaux semánticos. Como veremos, esta definición será, una vez más, una definición recursiva.

Definición 5.6.10 Sea

$$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$

un conjunto finito de fórmulas proposicionales.

Un **tableau** T asociado al conjunto Φ es cualquier árbol de fórmulas que pueda construirse en un número finito de pasos mediante las reglas de formación que se definen a continuación.

Reglas de formación de un tableau:

- **Regla de inicialización (R_{ini}):** el tableau inicial es un árbol de fórmulas T_0 con una única rama cuyos vértices están etiquetados por las fórmulas del conjunto Φ .
- **Regla de reducción (R_α):** si una rama abierta θ de T incluye un vértice etiquetado por una fórmula **conjuntiva** $\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$, podemos extender T a un nuevo tableau T' (una **extensión directa** de T) prolongando θ de forma lineal, con dos nuevos vértices α_1 y α_2 . Se añade a la fórmula conjuntiva el símbolo $\checkmark$.

Esta regla no se aplica si la rama abierta θ ya contiene α_1 y α_2 .

- **Regla de reducción (R_β):** si una rama abierta θ de T incluye un vértice etiquetado por una fórmula **disyuntiva** $\beta \equiv \beta_1 \vee \beta_2$, podemos extender T a un nuevo tableau T' (una **extensión directa** de T) bifurcando θ con dos nuevos vértices β_1 y β_2 , que sean hijos del vértice β . Se añade a la fórmula disyuntiva el símbolo $\checkmark$.

Esta regla no se aplica si la rama abierta θ ya contiene β_1 y β_2 . Si θ contiene sólo una de las dos componentes, se puede suprimir la bifurcación.

- **Regla de reducción (R_σ):** si una rama abierta θ de T incluye un vértice etiquetado por una fórmula **simplificable** $\sigma \equiv \sigma_1$, podemos extender T a un nuevo tableau T' (una **extensión directa** de T) prolongando θ de forma lineal, con un nuevo vértice σ_1 . Se añade a la fórmula simplificable el símbolo $\checkmark$.

Esta regla no se aplica si la rama abierta θ ya contiene σ_1 .

- **Regla de cierre (R_c):** si una rama abierta θ , contiene $\perp$ o ambas fórmulas φ y $\neg\varphi$ aparecen en θ se cierra usando el símbolo $\#$.

Las siguientes definiciones permiten saber cuando no es posible extender ulteriormente un tableau, es decir, cuando termina nuestro procedimiento de reducción de fórmulas.

Definición 5.6.11 • Una rama θ , de tableau T está **completa** (ó **saturada**) si y sólo si se cumplen las tres siguientes condiciones:

- 1) Si $\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$ pertenece a θ , entonces α_1 y α_2 pertenecen a θ .
- 2) Si $\beta \equiv \beta_1 \vee \beta_2$ pertenece a θ , entonces β_1 ó β_2 pertenece a θ .
- 3) Si $\sigma \equiv \sigma_1$ pertenece a θ , entonces σ_1 pertenece a θ .

- Un tableau está **cerrado** si todas sus ramas lo están.
- Un tableau está **acabado** si todas sus ramas están cerradas o completas.

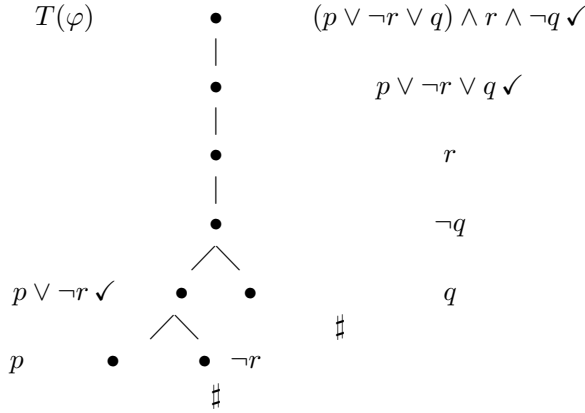


Figura 5.2: Tableau acabado de $\varphi = (p \vee \neg r \vee q) \wedge r \wedge \neg q$.

Observación 5.6.12 *Dado un conjunto de fórmulas, el tableau asociado a este conjunto no queda únicamente definido. Para intentar minimizar la complejidad del tableau que se obtiene, en general es conveniente reducir primero fórmulas de tipo σ y α , o fórmulas que permitan cerrar ramas. Entre las restantes fórmulas, conviene reducir las más sencillas antes que las más complejas.*

Las siguientes definiciones y teoremas permiten interpretar un tableau acabado.

Si una rama θ de un tableau es completa y abierta, el conjunto de las fórmulas que son sus etiquetas se dice **conjunto de Hintikka**. Es posible demostrar (ver [HLR]) que todo conjunto de Hintikka es satisficible.

Definición 5.6.13 • Una rama θ de un tableau es **satisficible** si y sólo si existe una valoración que satisfice las fórmulas de θ .

- Un tableau T es **satisficible** si y sólo si existe una valoración que satisfice las fórmulas de alguna de sus ramas.

Lema 5.6.14 (Lema de reducción) *Si un tableau T' es extensión de un tableau T , toda valoración que satisfice T satisfice también T' .*

Teorema 5.6.15 (Suficiencia y adecuación) *Un conjunto de fórmulas proposicionales Φ es insatisficible si y sólo si se le puede asociar un tableau cerrado T_Φ .*

Ejemplo 5.6.16 Sea $T(\varphi)$ el tableau acabado de la figura 5.2 asociado a la fórmula

$$\varphi = (p \vee \neg r \vee q) \wedge r \wedge \neg q.$$

$T(\varphi)$ tiene la primera rama abierta. Si asignamos valor de verdad 1 a todos los **literales** (fórmulas atómicas o negaciones de ellas) que son las etiquetas de esa rama, obtenemos que

$$\{p = 1, \neg q = 1, r = 1\}$$

son valores tales que φ es verdadera. Por tanto, la valoración

$$\{p = 1, q = 0, r = 1\},$$

es un modelo para φ .

Observación 5.6.17 Modificando la regla de iniciación y admitiendo la adición de hipótesis, es posible definir el concepto de tableau asociado a un conjunto infinito de fórmulas proposicionales. Su definición proporciona árboles con un número finito de vértices, ya que usan sólo un número finito de las fórmulas iniciales. Las consecuencias teóricas de la definición de tableaux para conjuntos infinitos de fórmulas son profundas y están relacionadas con las propiedades de corrección y completitud de los sistemas de demostración, que trataremos sólo brevemente al final del capítulo 6.

5.6.3 Aplicaciones de los tableaux

Tableaux y razonamientos

Sea $\Phi \rightarrow \varphi$ un razonamiento. El teorema (5.6.15) asegura que el tableau asociado a la negación del razonamiento $\neg(\Phi \rightarrow \varphi) \equiv \Phi \wedge \neg\varphi$ es cerrado si y sólo si el razonamiento es válido.

Por el otro lado, si el tableau asociado a no $\Phi \wedge \neg\varphi$ es cerrado, contendrá una rama abierta θ que nos permite hallar un contraejemplo a la validez del razonamiento (toda valoración que satisface θ es un contraejemplo).

Ejemplo 5.6.18 Consideremos el siguiente razonamiento:

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow (q \leftrightarrow \neg r) \\ (q \vee \neg r) \rightarrow \neg p \\ (q \wedge r) \vee p \end{array}}{p \wedge q \wedge \neg r}$$

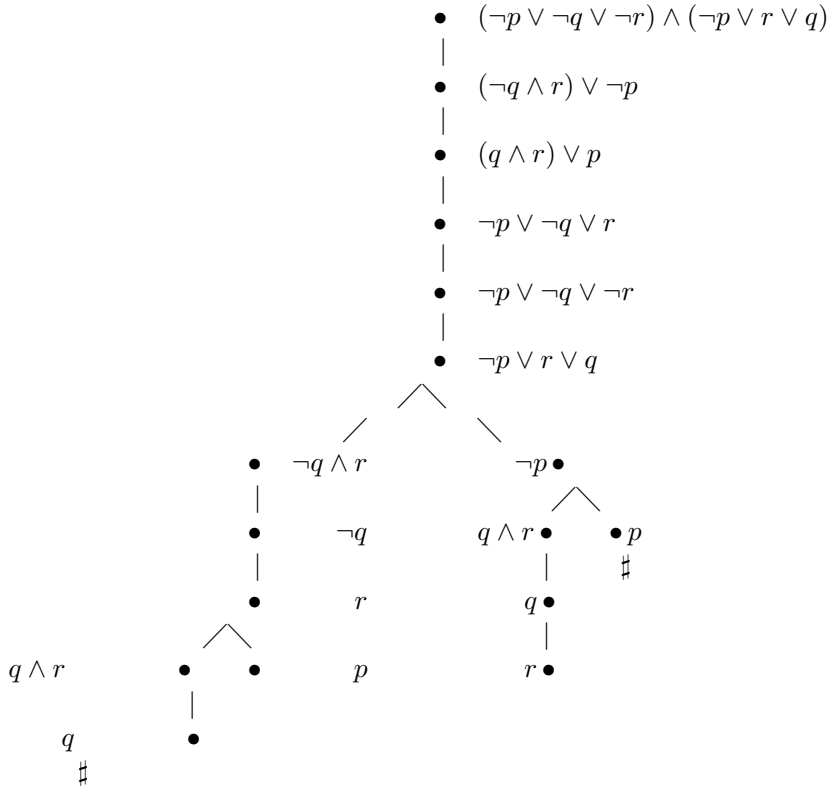
Para verificar su validez usando tableaux, tendremos que refutar la fórmula que se obtiene como conjunción de todas las premisas con la negación de la conclusión.

Podemos simplificar la construcción del tableau asociado escribiendo todas las fórmulas en términos de los conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

Usando equivalencias semánticas, obtenemos que el razonamiento dado se puede reescribir como:

$$\frac{\begin{array}{c} (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r \vee q) \\ (\neg q \wedge r) \vee \neg p \\ (q \wedge r) \vee p \end{array}}{p \wedge q \wedge \neg r}$$

El tableau completo asociado es:



El tableaux completo obtenido tiene dos ramas cerradas y dos abiertas. Estas últimas nos proporcionan dos contraejemplos del razonamiento, que se obtiene dando valor 1 a los literales que aparecen como sus etiquetas:

$$\{p = 1, r = 1, q = 0\} \quad y \quad \{p = 0, r = 1, q = 1\}.$$

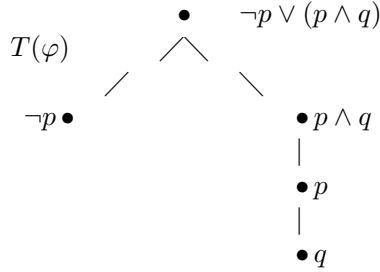
Tableaux y clasificación de fórmulas

Sea $T(\varphi)$ el tableaux asociado a una fórmula φ .

- Si $T(\varphi)$ es cerrado, φ es una contradicción (es insatisfacible).

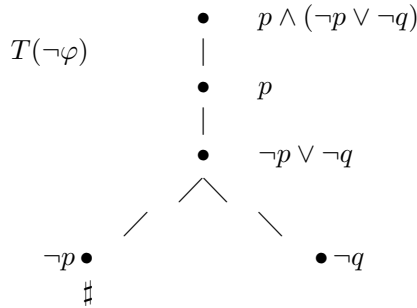
- Si $T(\varphi)$ tiene al menos una rama abierta, φ es satisfacible y tenemos que construir el tableau $T(\neg\varphi)$ asociado a $\neg\varphi$. Hay dos posibles casos:
 - si $T(\neg\varphi)$ es cerrado, φ es una tautología,
 - si $T(\neg\varphi)$ tiene al menos una rama abierta, φ es una contingencia.

Ejemplo 5.6.19 Sea $\varphi : p \rightarrow (p \wedge q)$ la fórmula que se quiere clasificar. φ es equivalente a la forma disyuntiva $\neg p \vee (p \wedge q)$ y el tableau $T(\varphi)$ es



Ya que hay dos ramas abiertas, φ es satisfacible (un modelo es, por ejemplo, $\{q = 1, p = 1\}$).

Ahora, $\neg\varphi : \neg(\neg p \vee (p \wedge q))$ es equivalente a la forma conjuntiva $p \wedge (\neg p \vee \neg q)$ el tableau $T(\neg\varphi)$ es



Hay una rama abierta y, por tanto, φ es una contingencia (la valoración $\{q = 0, p = 1\}$ es un contraejemplo de φ).

Tableaux y formas normales disyuntivas y conjuntivas

Vamos ahora a ver como la teoría de los tableaux semánticos se puede aplicar para hallar la forma normal disyuntiva y conjuntiva de una fórmula proposicional.

Representar un fórmula φ por medio de su formas normales disyuntiva y conjuntiva permite aplicar nuevos métodos de refutación como el método de resolución, que se estudiará en el contexto de la lógica de primer orden en la asignatura de Lógica Informática.

Siendo sus formas normales una nueva manera de expresar una fórmula por medio de los conectivos del conjunto $\{\neg, \wedge, \vee\}$, no es sorprendente que, también en este caso, la teoría de los tableaux sea una herramienta de cálculo efectiva.

Definición 5.6.20 (Formas normales disyuntivas y conjuntivas)

1. Un **literal** es cualquier fórmula de la forma p (literal positivo) o $\neg p$ (literal negativo), donde p es una proposición atómica.
2. Una **cláusula disyuntiva** es cualquier disyunción de literales.
3. Una **cláusula conjuntiva** es cualquier conjunción de literales.
4. Una fórmula está en **forma normal disyuntiva (FND)** si es una disyunción de cláusulas conjuntivas.
5. Una fórmula está en **forma normal conjuntiva (FNC)** si es una conjunción de cláusulas disyuntivas.

Convenios:

- Un literal se puede considerar como una disyunción o una conjunción.
- $\perp$ representa una disyunción, una cláusula disyuntiva o una FND vacía (siempre falsa).
- $\top$ representa una conjunción, una cláusula conjuntiva o una FNC vacía (siempre verdadera).

Teorema 5.6.21 ([HLR]) Sea φ una fórmula. A partir de las proposiciones atómicas de φ , se pueden siempre construir una forma normal disyuntiva, $FND(\varphi)$, y una forma normal conjuntiva, $FNC(\varphi)$, tales que

$$\varphi \equiv FND(\varphi) \quad y \quad \varphi \equiv FNC(\varphi).$$

Además, por las leyes de De Morgan y de la doble negación,

$$FNC(\varphi) \equiv \neg FND(\neg\varphi).$$

Cálculo de las formas normales disyuntiva y conjuntiva mediante tableaux

Dado un tableau acabado $T(\varphi)$, sean $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ sus ramas abiertas.

Para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sea Φ_i la fórmula obtenida como conjunción de los literales de la rama θ_i .

Por el lema de reducción (5.6.14) se obtiene que

$$FND(\varphi) = \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \Phi_3 \vee \dots \vee \Phi_n.$$

Observación 5.6.22 Las ramas cerradas de $T(\varphi)$ contribuyen a $FND(\varphi)$ por una disyunción con $\perp$ y se pueden ignorar.

Si $T(\varphi)$ está acabado, para determinar $FND(\varphi)$ es suficiente considerar sólo los literales que aparezcan en sus ramas abiertas, ya que todas las demás fórmulas ya han sido reducidas.

Aplicando las anteriores consideraciones y la equivalencia

$$FNC(\varphi) \equiv \neg FND(\neg\varphi),$$

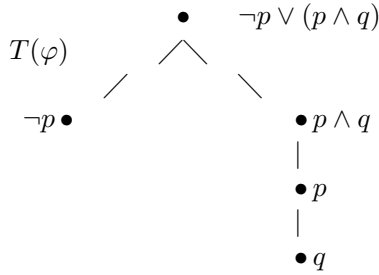
vamos a ver como $T(\varphi)$ y $T(\neg\varphi)$ permiten calcular $FND(\varphi)$ y $FNC(\varphi)$.

Ejemplo 5.6.23 Sea $\varphi : p \rightarrow p \wedge q$ la fórmula clasificada en el ejemplo (5.6.19).

Ya comentamos que, usando equivalencias lógicas, se obtiene que

$$\varphi \equiv \neg p \vee (p \wedge q) = FND(\varphi).$$

Vamos ahora a obtener $FND(\varphi)$ mirando al tableau acabado $T(\varphi)$,



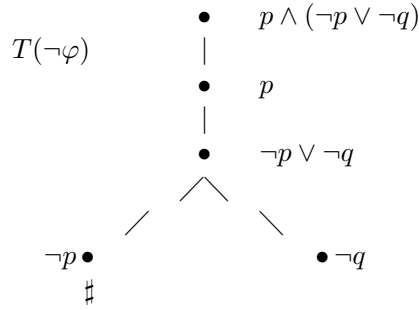
Observamos que hay dos ramas abiertas, con $\Phi_1 = \neg p$ y $\Phi_2 = p \wedge q$. Por tanto, en este caso,

$$FND(\varphi) = \Phi_1 \vee \Phi_2 = \neg p \vee (p \wedge q).$$

Usando equivalencias lógicas, obtenemos que

$$\neg\varphi \equiv \neg FND(\varphi) \equiv p \wedge (\neg p \vee \neg q).$$

Mirando al tableau acabado $T(\neg\varphi)$,



observamos que hay una sola rama abierta, con $\Phi_2 = p \wedge \neg q$.

Entonces

$$FND(\neg\varphi) = (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \quad (\text{si no ignoramos la rama cerrada}),$$

o

$$FND(\neg\varphi) = p \wedge \neg q \quad (\text{si ignoramos la rama cerrada}).$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} FNC(\varphi) &= \neg FND(\neg\varphi) = \neg((p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q)) \equiv \\ &\equiv \neg(p \wedge \neg p) \wedge \neg(p \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \end{aligned}$$

o

$$FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi) = \neg(p \wedge \neg q) \equiv \neg p \vee q.$$

5.7 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.7.1 ¿Cuáles de las fórmulas del ejercicio (4.5.5) del capítulo 4 son tautologías? ¿Cuáles son contradicciones?

Para aquellas que sean contingencias, calcula sus modelos y sus contraejemplos.

Ejercicio 5.7.2 Prueba que las siguientes fórmulas son tautologías:

$$\begin{aligned}
 &\varphi \vee \neg\varphi, \quad \neg(\varphi \wedge \neg\varphi), \\
 &(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi), \quad (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi), \\
 &\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi, \quad \varphi \vee (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \chi \\
 &\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi), \quad \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi), \\
 &(\varphi \vee \neg\varphi) \wedge \psi \leftrightarrow \psi, \quad (\varphi \vee \neg\varphi) \vee \psi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg\varphi), \\
 &(\varphi \wedge \neg\varphi) \vee \psi \leftrightarrow \psi, \quad (\varphi \wedge \neg\varphi) \wedge \psi \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi), \\
 &\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi, \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi.
 \end{aligned}$$

Ejercicio 5.7.3 Sea φ una fórmula proposicional. Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y justifica tus respuestas.

- Si φ es insatisfacible, $\neg(\varphi)$ es una tautología.
- Si φ es una tautología, $\neg(\varphi)$ es insatisfacible.
- Si φ es una contingencia, $\neg(\varphi)$ es una contingencia.
- Si φ es satisfacible, $\neg(\varphi)$ es satisfacible.
- Si φ es satisfacible, $\neg(\varphi)$ no es una tautología.

Ejercicio 5.7.4 Verifica las implicaciones lógicas de la tabla (5.3).

Ejercicio 5.7.5 ¿Son validas las siguientes deducciones?

$$\begin{array}{ccc}
 & (q \vee \neg s) \rightarrow r & \\
 p \rightarrow \neg r & \neg q \rightarrow r & \\
 \frac{q \rightarrow r}{\neg(p \wedge q)}, & \frac{p \rightarrow \neg s}{r \rightarrow s}, & \\
 & \frac{r \rightarrow s}{p \rightarrow r} &
 \end{array}$$

$$\frac{p \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow s)}{(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow s)}, \quad \frac{(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow s)}{p \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow s)}, \quad \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ s \vee p \end{array}}{r \vee t}.$$

Ejercicio 5.7.6 Peláez, Quesada y Rodríguez son tres políticos acusados de corrupción. En el juicio ellos declaran:

Peláez: “Quesada es culpable y Rodríguez es inocente.”

Quesada: “Peláez es culpable sólo si Rodríguez es también culpable.”

Rodríguez: “Yo soy inocente, pero al menos uno de los otros es culpable.”

Si todos son inocentes, ¿quién ha mentido?

Si todos dicen la verdad, ¿quién es inocente?

Si los inocentes dicen la verdad y los culpables mienten, ¿quién es inocente?

Ejercicio 5.7.7 *Determina si la deducciones de los ejercicios (4.5.12) y (4.5.13) del capítulo 4 son válidas.*

Ejercicio 5.7.8 *(La equivalencia de fórmulas es una relación de equivalencia) Demuestra que en el conjunto $\mathbf{L}$ de las fórmulas bien construidas, la relación*

$$\varphi \equiv \psi \quad \text{si y sólo si} \quad (\varphi \leftrightarrow \psi \quad \text{es una tautología})$$

es una relación de equivalencia.

Ejercicio 5.7.9 *Verifica las equivalencias lógicas de la tabla (5.4).*

Ejercicio 5.7.10 *Elegir de las afirmaciones siguientes aquella que sea equivalente a “No es cierto que sea suficiente trabajar para ser feliz.”*

1. *No trabajar es suficiente para no ser feliz.*
2. *Para ser feliz es necesario trabajar.*
3. *No es posible trabajar y no ser feliz al mismo tiempo.*
4. *Se puede trabajar y no ser feliz.*
5. *Se trabaja o no se es feliz.*

Ejercicio 5.7.11 *Dadas las fórmulas*

$$p \rightarrow q, \quad (q \vee \neg s) \rightarrow r, \quad p \leftrightarrow q, \quad (p \vee r) \rightarrow (p \wedge \neg r), \quad (r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q),$$

encuentra otras equivalentes en las que se usen sólo los conectivos $\neg, \wedge, \vee$. Deduce que toda fórmula bien construida es equivalente a otra donde intervienen sólo los conectivos $\neg, \wedge, \vee$.

Ejercicio 5.7.12 *Encuentra una fórmula equivalente a $p \vee q$ en la que sólo intervengan los conectivos $\wedge, \neg$. Deduce que toda fórmula bien construida es equivalente a otra donde intervienen sólo los conectivos $\neg, \wedge$.*

Ejercicio 5.7.13 *Sea $\varphi = p \rightarrow q$. Verifica que $\varphi[p/q, q/p]$ no es equivalente a $\varphi[q/p, q/p]$. Se sigue que intercambiando el orden de aplicación de dos sustituciones en una misma fórmula φ , las dos fórmulas que se obtienen no tienen que ser equivalentes.*

Ejercicio 5.7.14 En informática, se suelen definir los siguientes conectivos binarios:

1. El **ó exclusivo**, con símbolo $\oplus$, es la negación de la doble implicación.
2. El **nor**, con símbolo $\downarrow$, es la negación de la disyunción.
3. El **nand**, con símbolo $\uparrow$, es la negación de la conjunción.

Escribe las tablas de los valores de verdad de estos tres conectivos.

Ejercicio 5.7.15 Determina si la dos fórmulas

$$\varphi_1 : (r \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow s \quad \varphi_2 : r \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee s.$$

son equivalentes y dibuja sus árboles sintácticos.

Ejercicio 5.7.16 Considera el siguiente razonamiento:

x es positivo sólo si es mayor que 0. x no es positivo si x es negativo. Por tanto, x es positivo y negativo sólo si es igual a cero.

a) Formaliza el razonamiento anterior en la lógica proposicional.

b) Por medio de equivalencia de fórmulas, halla una fórmula proposicional equivalente al razonamiento y tal que contenga sólo los conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

Ejercicio 5.7.17 Estudia, mediante tableaux, la validez de los argumentos:

$$\begin{aligned} \{(p \vee \neg q) \rightarrow r, \quad \neg p \rightarrow t, \quad s \rightarrow \neg q, \quad r \rightarrow q\} &\models s \rightarrow t \\ \{t \rightarrow (s \rightarrow p), \quad p \rightarrow \neg p, \quad (r \rightarrow t) \wedge (q \rightarrow s)\} &\models r \rightarrow \neg q \\ \{s \vee t, \quad q \rightarrow p, \quad t \rightarrow \neg p, \quad \neg s\} &\models \neg q \end{aligned}$$

Ejercicio 5.7.18 Demuestra, utilizando tableaux, que la siguiente fórmula es una contradicción:

$$\varphi : ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)) \wedge p.$$

Ejercicio 5.7.19 Clasifica la siguiente fórmula usando el método de los tableaux:

$$\varphi : (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

Ejercicio 5.7.20 Formaliza el siguiente razonamiento con el lenguaje de la lógica proposicional y prueba su validez usando el método de los tableaux.

Si Cristina está en lo cierto, entonces Marcos está equivocado. Si Marcos está equivocado, entonces Pablo también está equivocado. Si Pablo está equivocado, entonces el espectáculo no es esta noche. O el espectáculo es esta noche o Javier no lo verá. Cristina está en lo cierto. Por tanto, Javier no verá el espectáculo.

Ejercicio 5.7.21 Formaliza el siguiente razonamiento y estudia su validez usando tableaux.

Si el barco entra en el puerto, habrá una gran fiesta. El barco entra en el puerto sólo si necesita repostar combustible. El barco no necesita combustible a menos que venga de muy lejos. Es imposible que no necesite combustible si la comida ya se les ha terminado. Sabemos que, o bien se le ha terminado la comida, o bien necesita combustible. Por tanto: habrá una gran fiesta.

Ejercicio 5.7.22 Usando tableaux, clasifica las fórmulas:

1. $\neg s \vee \neg p \rightarrow (t \rightarrow (p \vee \neg s))$
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
3. $(t \rightarrow (p \wedge s)) \wedge (\neg s \rightarrow p \wedge \neg t)$
4. $(\neg(\neg(\neg p \vee r) \vee q)) \rightarrow (\neg(p \wedge q) \vee r)$

Ejercicio 5.7.23 Con el método de los tableaux, escribe las fórmulas del ejercicio anterior en su formas normal disyuntiva y conjuntiva.

Ejercicio 5.7.24 Por medio de un tableau semántico acabado halla la forma normal disyuntiva de la fórmula proposicional $(p \vee r \rightarrow s) \wedge (t \rightarrow t \wedge s)$.

Ejercicio 5.7.25 Consideramos la siguiente fórmula:

$$\varphi : ((r \rightarrow q) \vee (p \vee \neg q)) \rightarrow (r \rightarrow (q \vee p)).$$

- a) Clasifica φ usando el método de los tableaux.
- b) Escribe una FND de φ .
- c) Encuentra, si es posible, una valoración que sea modelo de φ y otra que sea contraejemplo de φ .

Ejercicio 5.7.26 Por medio de tableaux semánticos acabados, determina si la siguiente fórmula proposicional es una tautología:

$$(p \wedge q \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p \vee q).$$

Capítulo 6

Teoría de la demostración y sistema de deducción natural de Gentzen

En el capítulo anterior estudiamos el método indirecto de refutación (y los tableaux semánticos) y el método directo de las tablas de verdad como métodos semánticos para verificar la validez de fórmulas y deducciones. Sin embargo, si el número de proposiciones atómicas es elevado las tablas de verdad no son un método eficiente (para un signatura con n fórmulas atómicas, tenemos que construir una tablas de 2^n filas).

La **teoría de la demostración o teoría de pruebas** nos proporciona métodos alternativos a las tablas de verdad para averiguar

- **la validez de una fórmula proposicional:** si φ es una fórmula válida se dice que es **demostrable** y se escribe $\vdash \varphi$.
- **si una fórmula φ es consecuencia lógica de un conjunto de premisas Φ :** si φ es consecuencia lógica de Φ se dice que φ es **deducible** en el sistema a partir de Φ y se escribe $\Phi \vdash \varphi$.

Toda teoría matemática se construye a partir de unos **axiomas**, que definen las propiedades básicas de los objetos de la teoría que se consideran verdaderas y, sin embargo, no se demuestran.

La geometría euclídea y la construcción de los números reales son dos ejemplos de este tipo de teorías axiomáticas.

Los axiomas de toda teoría matemática tienen que ser:

- 1) **compatibles:** a partir de ellos no tiene que ser posible deducir una contradicción,
- 2) **independientes:** ningún axioma se debe poder deducir a partir del resto de ellos (habría redundancia de axiomas),
- 3) **suficientes:** a partir de ellos tiene que ser posible deducir todas las propiedades que necesitamos satisfagan los objetos de nuestra teoría.

El objetivo principal de cualquier teoría de pruebas es demostrar la validez de fórmulas, independientemente del contexto particular que se estén considerando: la demostración de la validez de una fórmula o de una deducción en un sistema de demostración no se desarrolla teniendo en cuenta todas las posibles valoraciones, se obtiene utilizando una secuencia finita de pasos y, en cada uno de ellos, se aplican las reglas de inferencia del sistema.

Ya comentamos que los sistemas de demostración se suelen dividir en dos clases: **sistemas directos** y **sistemas indirectos** (o por **refutación**). Los primeros aplican una cadena finita de reglas de inferencia hasta llegar a la fórmula que se quiere demostrar. Los segundos aplican la técnica de reducción al absurdo.

Siendo sistemas clásicos, los sistemas de demostración directos tienen interés histórico y además son los más naturales ya que son los más cercanos a la forma de razonamiento habitual.

Los sistemas directos son adaptables a lógicas no clásicas, pero son de difícil automatización.

Los sistemas de demostración indirectos son más modernos y adecuados para su automatización, pero no son aplicables a lógicas distintas de las lógicas clásicas.

En este capítulo estudiaremos un particular sistema de demostración axiomático, el sistema de deducción natural de Gentzen.

El método de los tableaux semánticos que estudiamos en la teoría interpretativa tiene, en realidad, una estructura completamente sintáctica y, por tanto, se puede considerar un ejemplo de sistemas de demostración axiomático indirecto.

Como veremos, es posible demostrar que estos sistemas axiomáticos son equivalentes a la teoría interpretativa. Es decir, se puede verificar que una fórmula proposicional es una tautología en la teoría interpretativa si y sólo si es una fórmula válida en la teoría de la demostración que vamos a estudiar.

6.1 Definición de sistema formal axiomático

Definición 6.1.1 *Un sistema de demostración formal S o sistema de pruebas se define matemáticamente mediante los siguientes cuatro elementos:*

*A es el **alfabeto** del sistema: el conjunto de símbolos que se pueden utilizar,*

*F es el conjunto de **reglas de sintaxis**: las reglas que permiten definir las fórmulas bien construidas,*

*X es el conjunto de **axiomas**: fórmulas válidas por definición,*

*R es el conjunto de **reglas de inferencias**: reglas de transformación que permiten “inferir” una fórmula, la **conclusión**, a partir de un conjunto de fórmulas, las **condiciones o premisas**.*

Un sistema de demostración S se puede representar en forma compacta como

$$S = (A, F, X, R).$$

Definición 6.1.2 (Definición recursiva de teorema) *Un teorema es una fórmula válida (demostrable) y tiene la siguiente definición recursiva: una fórmula bien construida φ es un **teorema** si es un axioma o si se obtiene como conclusión de la aplicación de un conjunto de reglas de inferencias a otros teoremas.*

Si φ es un teorema (es válida), se escribe $\vdash \varphi$.

Ejemplo 6.1.3 *En el contexto de las implicaciones lógicas (semánticas), estudiamos la validez de la ley de contraposición de la tabla (5.3):*

$$(p \rightarrow q) \models (\neg q \rightarrow \neg p).$$

Dicimos también que la fórmula

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

es una tautología.

Si somos capaces de demostrar que la ley de contraposición es válida en el sistema axiomático que estamos usando, podemos escribir la misma ley de contraposición en forma de teorema, usando la notación:

$$\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p).$$

Sólo como caso particular, consideremos las dos proposiciones p ="como demasiado" y q ="me duele el estómago."

La teoría interpretativa, en este caso, nos dice que la proposición "si no me duele el estómago entonces no he comido demasiado," $(\neg q \rightarrow \neg p)$, es consecuencia lógica (vimos que en realidad es equivalente) de la proposición "si como demasiado me duele el estómago," $(p \rightarrow q)$.

En una teoría de pruebas la validez de la ley de contraposición se expresaría, en nuestro ejemplo particular, como la validez de la fórmula bien construida "si como demasiado me duele el estómago implica que si no me duele el estómago entonces no he comido demasiado," $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$.

Definición 6.1.4 *Una deducción o razonamiento consiste de un conjunto de fórmulas $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, llamadas las **premisas**, y de una fórmula φ , llamada la **conclusión** de la deducción.*

Ejemplo 6.1.5 *Escrita como deducción, la ley de contraposición tiene una sola premisa $\Phi = \{(p \rightarrow q)\}$ y conclusión $(\neg q \rightarrow \neg p)$.*

Las nociones de demostración de un teorema y de una deducción están establecidas por las siguientes definiciones:

Definición 6.1.6 (Demostración de fórmulas (de teoremas)) Una demostración de un teorema $\vdash \varphi$ es una sucesión finita de fórmulas

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1} = \varphi\}$$

tal que:

1. Cada fórmula de la sucesión es
 - un axioma, un teorema ya demostrado o
 - un teorema obtenido a partir de las fórmulas anteriores de la sucesión aplicando un conjunto de reglas de inferencias.
2. El último elemento de la sucesión es la fórmula φ .

Si $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1} = \varphi\}$ es una demostración de un teorema, se dice que φ es **válida (demostrable)** y se escribe $\vdash \varphi$.

Definición 6.1.7 (Demostración de deducciones) Sean

$$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$

un conjunto finito de fórmulas proposicionales y φ una fórmula.

Una demostración de una deducción con conjunto de premisas Φ y conclusión φ es una sucesión finita de fórmulas

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \dots, \varphi_{n+m-1}, \varphi_{n+m} = \varphi\}$$

tal que:

1. Cada fórmula de la sucesión es
 - una premisa (un elemento de $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$) o
 - un axioma, un teorema ya demostrado o
 - un teorema obtenido a partir de las fórmulas anteriores en la sucesión aplicando un conjunto de reglas de inferencias.
2. El último elemento de la sucesión es la fórmula φ .

Si $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \dots, \varphi_{n+m-1}, \varphi_{n+m} = \varphi\}$ es una demostración de una deducción, se dice que la conclusión φ es **consecuencia lógica (deducible)** del conjunto de las premisas Φ y se escribe $\Phi \vdash \varphi$.

Observación 6.1.8 Podemos observar que la demostración de un teorema es la demostración de una deducción cuyo conjunto de premisas es vacío.

El apéndice A contiene la descripción del sistema axiomático de Kleene. Usando este sistema de demostración es posible demostrar el siguiente teorema de la deducción. La consecuencia fundamental del teorema de la deducción es la determinación de la relación entre demostraciones de teoremas y demostraciones de deducciones. No presentamos aquí su demostración, que se puede encontrar, por ejemplo, en el párrafo 2.3 de [C] o en el párrafo 3.1.1 de [A].

Teorema 6.1.9 (Teorema de la deducción) Sean $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ un conjunto de fórmulas y φ una fórmula. Entonces

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}\} \vdash (\varphi_n \rightarrow \varphi).$$

El siguiente corolario del teorema de la deducción establece la relación buscada entre demostraciones de deducciones y de teoremas.

Corolario 6.1.10 Dada una demostración de una deducción, es siempre posible encontrar una fórmula válida que la represente.

Demostración [C]: Si $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi$ es la demostración de una deducción, se aplica el teorema de la deducción sucesivamente hasta que el conjunto de premisas sea vacío. Se obtiene así la siguiente cadena de fórmulas que tiene como último elemento un teorema:

$$\begin{aligned} & \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi \\ & \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}\} \vdash \varphi_n \rightarrow \varphi \\ & \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2}\} \vdash \varphi_{n-1} \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \varphi) \\ & \vdots \\ & \vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \varphi) \dots)). \end{aligned}$$

Ejemplo 6.1.11 El teorema de la deducción implica que, en un sistema de pruebas, demostrar la validez de la ley de contraposición

$$\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

es equivalente a demostrar la deducción

$$\{p \rightarrow q\} \vdash \neg q \rightarrow \neg p$$

o, también, la deducción

$$\{p \rightarrow q, \neg q\} \vdash \neg p.$$

En el caso de nuestro ejemplo particular con $p =$ “como demasiado” y $q =$ “me duele el estómago”, la última deducción se lee “si como demasiado me duele el estómago y si no me duele el estómago, entonces no he comido demasiado.”

6.1.1 Subdeducciones y notación de Fitting

Antes de definir formalmente el sistema de deducción natural de Gentzen, necesitamos extender la definición de demostración de deducción dada, la (6.1.7), para poder admitir la introducción de subdeducciones. Informalmente se puede decir que, en el proceso de demostración de una deducción (la demostración madre), una subdeducción es la derivación de una conclusión ψ a partir de una

premisa auxiliar (o hipótesis) φ . Después de obtener la conclusión buscada en la subdeducción, se remueve la subdeducción de la demostración madre y se sustituye por el resultado $\varphi \vdash \psi$.

Para representar subdeducciones usaremos la notación de Fitting [F]. Esta notación emplea rectángulos, llamados **cajas**. La primera fila de una caja está ocupada por la premisa auxiliar φ , mientras en la última fila se encuentra la conclusión ψ .

El siguiente es un ejemplo de un esquema de una deducción que contiene a una subdeducción:

- 1) φ_1 (Premisa)
- 2) φ_2 (Premisa)
- 3) $\vdash \varphi_3$ (R1(1): regla R1 aplicada a φ_1)

- 4) ψ_1 (Premisa auxiliar)
- 5) $\vdash \psi_2$ (R2(2,1): regla R2 aplicada a φ_2 y ψ_1)
- 6) $\vdash \psi_3$ (R3(5): regla R3 aplicada a ψ_2)

- 7) $\vdash \varphi_4$ (R4(4,6): regla R4 aplicada a la subdeducción)

La notación usada en el último paso de la demostración madre, $R4(4, 6)$, quiere decir que la regla R4 se aplica a toda la subdeducción. Se citan sólo la premisa auxiliar y la conclusión de ella.

Pronto veremos algunos ejemplos, pero hay que notar que una subdeducción puede contener a su vez una subdeducción. Por tanto, en la representación de Fitting pueden aparecer varios rectángulos encajados.

6.2 El sistema de deducción natural de Gentzen

El sistema de deducción natural de Gerald Gentzen (1934) es el sistema de demostración que mejor modela el razonamiento informal o intuitivo.

Este sistema se basa en deducciones y tiene ocho reglas de inferencia y ningún axioma. Las reglas de inferencia son dos para cada conectivo lógico del alfabeto (una de introducción y otra de eliminación).

El uso exclusivo de deducciones presupone razonamientos que siempre dependen de unas premisas iniciales, no necesariamente válidas. Se podría decir que el sistema de Gentzen simula el razonamiento coherente más que el razonamiento válido.

6.2.1 Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

Definición 6.2.1 *El sistema de deducción natural de Gentzen es el sistema de demostración*

$$\mathbf{G} = (A, F, X, R),$$

donde

A : el alfabeto está compuesto por

- los símbolos $p, q, r, s, t, \dots$ de proposiciones atómicas,
- los símbolos de conectivos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$,
- los símbolos de paréntesis $(,)$.

F : el conjunto de las fórmulas bien construidas (fbc) se define recursivamente como

At : toda proposición atómica es una fbc,

$\neg$: Si φ es una fbc entonces $\neg\varphi$ es una fbc,

$\circ$: si φ y ψ son dos fbc, entonces

$$\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \varphi$$

son fbc.

Toda fbc se obtiene mediante las tres reglas anteriores.

NOTA: En lo que se sigue usaremos también el conectivo de coimplicación entre dos fórmulas, $\varphi \leftrightarrow \psi$. Este conectivo se entenderá como una forma abreviada de representar la fórmula bien construida $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

X : el conjunto de los axiomas es vacío.

R : el conjunto R de las reglas de inferencia está compuesto por las reglas de introducción y de eliminación que se describen a continuación.

Reglas del sistema de Gentzen:

$(I \wedge)$: Regla de introducción de la conjunción

$$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$$

De dos fórmulas se deduce su conjunción.

$(E \wedge)$: Regla de eliminación de la conjunción

$$\begin{array}{ll} \varphi \wedge \psi \vdash \varphi & (\text{eliminación derecha}) \\ \varphi \wedge \psi \vdash \psi & (\text{eliminación izquierda}) \end{array}$$

De una conjunción de dos fórmulas se deducen las dos fórmulas.

Ejemplo 6.2.2 [UNED1] Usando sólo las dos reglas anteriores podemos demostrar que

$$p \wedge (q \wedge r) \vdash p \wedge r.$$

- 1) $\varphi_1 : p \wedge (q \wedge r)$ (Premisa)
- 2) $\vdash \varphi_2 : \vdash p$ ($E \wedge(1)$)
- 3) $\vdash \varphi_3 : \vdash q \wedge r$ ($E \wedge(1)$)
- 4) $\vdash \varphi_4 : \vdash r$ ($E \wedge(3)$)
- 5) $\vdash \varphi_5 : \vdash p \wedge r$ ($I \wedge(2,4)$)

$(I \vee)$: Regla de introducción de la disyunción

$$\begin{aligned} \varphi \vdash (\varphi \vee \psi) & \quad (\text{introducción derecha}) \\ \psi \vdash (\varphi \vee \psi) & \quad (\text{introducción izquierda}) \end{aligned}$$

La disyunción de dos fórmulas se puede deducir de cada una de ellas.

$(E \vee)$: Regla de eliminación de la disyunción

NOTA: la regla de eliminación de la disyunción **NO** es

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi \vdash \varphi \\ \varphi \vee \psi \vdash \psi, \end{aligned}$$

ya que de la validez de una disyunción de dos fórmulas no se puede deducir la validez de las dos fórmulas. Sólo sabemos que al menos una de las dos es válida, sin saber cuál es.

La regla de eliminación de la disyunción es

$$(E \vee) : \{\varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \chi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \chi.$$

Esta regla se usa en el **método de demostración por casos**, que se aplica cuando se quiere demostrar una deducción del tipo $\varphi \vee \psi \vdash \chi$:

- 1) se introducen las premisas auxiliares φ y ψ ,
- 2) usando las dos premisas auxiliares se intentan demostrar dos subdeducciones independientes con igual conclusión χ , es decir, las subdeducciones

$$\varphi \vdash \chi \quad \text{y} \quad \psi \vdash \chi,$$

- 3) si se ha completado el paso anterior, se usan las subdeducciones obtenidas en la deducción madre y se obtiene que

$$\{\varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \chi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \chi.$$

Con la notación de Fitting $(E \vee)$ se representa como:

$\varphi \vee \psi$ (Premisa)

φ (Premisa auxiliar) $\vdots$ $\vdots$ $\vdash \chi$	ψ (Premisa auxiliar) $\vdots$ $\vdots$ $\vdash \chi$
---	--

$\vdash \chi$

Ejemplo 6.2.3 [UNED1] Si queremos demostrar la propiedad distributiva de la conjunción

$$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

podemos usar el siguiente esquema:

- 1) $p \wedge (q \vee r)$ (Premisa)
- 2) $\vdash p$ ($E \wedge(1)$)
- 3) $\vdash q \vee r$ ($E \wedge(1)$)

$4) q$ (Premisa auxiliar) $5) \vdash p \wedge q$ ($I \wedge(2, 4)$) $6) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ($I \vee(5)$)	r (Premisa auxiliar) $\vdash p \wedge r$ ($I \wedge(2, 4)$) $\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ($I \vee(5)$)
--	---

$$7) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad (E \vee(3, (4, 5)))$$

$(I \neg)$: Regla de introducción de la negación

$$(I \neg) : \{\varphi \rightarrow \psi, \varphi \rightarrow \neg\psi\} \vdash \neg\varphi.$$

Esta regla se usa en **demonstraciones por reducción al absurdo** de la validez de una fórmula $\neg\varphi$:

- 1) Tomamos como premisa auxiliar la fórmula φ ,
- 2) Si de esta premisa auxiliar podemos deducir la validez de una contradicción $\psi \wedge \neg\psi$, entonces podemos afirmar la validez de $\neg\varphi$.

Con la notación de Fitting $(I \neg)$ se representa como:

Ejemplos 6.2.4 1) Si queremos demostrar la contraposición

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi,$$

podemos escribir el siguiente esquema:

$$1) \varphi \rightarrow \psi \quad (\text{Premisa})$$

$$2) \neg\psi \quad (\text{Premisa})$$

$$3) \neg\neg\varphi \quad (\text{Premisa auxiliar})$$

$$4) \vdash \varphi \quad (E \neg(3))$$

$$5) \vdash \psi \quad (E \rightarrow(3,1))$$

$$6) \vdash \psi \wedge \neg\psi \quad (I \wedge(4,2))$$

$$7) \vdash \neg\varphi \quad (I \neg(3,5))$$

2) La validez de la fórmula

$$\varphi \vdash \psi \rightarrow \varphi$$

se puede demostrar en el sistema de deducción natural usando la introducción de la implicación, según el esquema:

$$1) \varphi \quad (\text{Premisa})$$

$$2) \psi \quad (\text{Premisa auxiliar})$$

$$3) \vdash \varphi \quad (1)$$

$$4) \vdash \psi \rightarrow \varphi \quad (I \rightarrow (2,3))$$

3) La validez de la fórmula

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)\} \vdash \varphi \rightarrow \chi$$

se puede demostrar en el sistema de deducción natural usando la introducción de la implicación, según el esquema:

- 1) $\varphi \rightarrow \psi$ (Premisa)
- 2) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ (Premisa)

- 3) φ (Premisa auxiliar)
- 4) $\vdash \psi$ ($E \rightarrow (3,1)$)
- 5) $\vdash \psi \rightarrow \chi$ ($E \rightarrow (3,2)$)
- 6) $\vdash \chi$ ($E \rightarrow (4,5)$)

- 7) $\vdash \varphi \rightarrow \chi$ ($I \rightarrow (3,6)$)

6.2.2 Reglas derivadas del sistema de Gentzen

A partir de la definición del sistema de Gentzen es posible demostrar los resultados más interesantes de la lógica proposicional. Vamos a enunciar una larga lista de ellos para poder mirar a varios ejemplos de demostración y aprender como aplicar estas nuevas reglas.

Presentaremos sólo algunas de las demostraciones de estas deducciones, las demás se pueden encontrar en la bibliografía de estos apuntes.

- **T1: Teorema de la identidad**

$$\varphi \vdash \varphi$$

De toda fórmula se deduce ella misma.

Esta deducción se puede demostrar por reducción al absurdo:

- 1) φ (Premisa)

- 2) $\neg\varphi$ (Premisa auxiliar)
- 3) $\vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ ($I \wedge (1,2)$)

- 4) $\vdash \varphi$ ($I \neg (2,3)$)

- **T2: Regla del silogismo**

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi$$

De dos implicaciones ($\varphi \rightarrow \psi$ y $\psi \rightarrow \chi$) tales que la conclusión de la primera es la premisa de la segunda se deduce la implicación de la premisa de la primera fórmula a la conclusión de la segunda.

Este teorema se puede pensar como una propiedad transitiva: de “todos los hombres son animales” y “todos los animales son mortales” se deduce que “todos los hombres son mortales.”

- **T3: Modus ponens, MP**

$$\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \psi$$

Es la regla de eliminación de la implicación: de una implicación y de su premisa se deduce su conclusión.

Por ejemplo, de “Juan es un hombre” y “si Juan es un hombre entonces es mortal” se deduce que “Juan es mortal.”

- **T4: Excontradictione Quodlibet**

$$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$$

De una fórmula y de su negación se deduce cualquier fórmula (por reducción al absurdo).

De “Juan es un hombre” y “Juan no es un hombre” se deduce que “la pared es blanca.”

- **T5: Producto condicional**

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \varphi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi \wedge \chi$$

De dos implicaciones con la misma premisa se deduce la implicación de esa premisa a la conjunción de sus conclusiones.

Por ejemplo, de “si x es par, es divisible por dos” y “si x es par, no es impar” se deduce que “si x es par, entonces x es divisible por dos y no es impar.”

- **T6: Contraposición**

$$\text{T6.1)} \quad \varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$$

$$\text{T6.2)} \quad \varphi \rightarrow \neg\psi \vdash \psi \rightarrow \neg\varphi$$

$$\text{T6.3)} \quad \neg\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \varphi$$

De una implicación se deduce su contrapositiva (ver ejemplo (6.2.4)).

Por ejemplo,

T6.1) de “llevo paraguas sólo si llueve” se deduce que “si no llueve no llevo paraguas,”

T6.2) de “llevo paraguas sólo si no hace sol” se deduce que “si hace sol no llevo paraguas.”

T6.3) de “no llevo paraguas sólo si hace sol” se deduce que “si no hace sol llevo paraguas.”

- **T7: Interdefinición 1**

$$T7.1) \quad \varphi \rightarrow \psi \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$$

De una implicación se deduce la negación de la conjunción de su premisa con la negación de su conclusión.

$$T7.2) \quad \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

Es el recíproco del anterior: una implicación se deduce de la negación de la conjunción de su premisa con la negación de su conclusión.

Por ejemplo,

T7.1) de “llevo paraguas sólo si llueve” se deduce que “no es posible que lleve paraguas y no llueva,”

T7.2) de “no es posible que lleve paraguas y no llueva” se deduce que “llevo paraguas sólo si llueve.”

- **T8: Leyes de de Morgan**

$$T8.1) \quad \neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

De la negación de la disyunción de dos fórmulas se deduce la conjunción de las negaciones de las mismas.

$$T8.2) \quad \neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$$

Es la recíproca del anterior: de la conjunción de las negaciones de dos fórmulas se deduce la negación de la disyunción de las mismas.

Por ejemplo,

T8.1) de “no es posible que x sea un elemento de A o sea un elemento de B” se deduce que “x no es elemento de A y x no es elemento de B,”

T8.2) de “x no es elemento de A y x no es elemento de B” se deduce que “no es posible que x sea un elemento de A o sea un elemento de B.”

$$T8.3) \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$$

De la negación de la conjunción de dos fórmulas se deduce la disyunción de las negaciones de las mismas.

$$T8.4) \quad \neg\varphi \vee \neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$$

Es la recíproca del anterior: de la disyunción de las negaciones de dos fórmulas se deduce la negación de la conjunción de las mismas.

Por ejemplo,

T8.3) de “no es posible que x sea un elemento de A y de B” se deduce que “x no es elemento de A o x no es elemento de B,”

T8.4) de “x no es elemento de A o x no es elemento de B” se deduce que “no es posible que x sea un elemento de A y de B.”

- **T9: Interdefinición 2**

$$\text{T9.1)} \quad \varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\varphi \vee \psi$$

De una implicación se deduce la disyunción de la negación de su premisa con su conclusión.

$$\text{T9.2)} \quad \neg\varphi \vee \psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

Es la recíproca de la anterior: una implicación se deduce de la disyunción de la negación de su premisa con su conclusión.

Por ejemplo,

T9.1) de “una función derivable es continua” se deduce que “una función no es derivable o es continua,”

T9.2) de “una función no es derivable o es continua” se deduce que “una función derivable es continua.”

Ejemplo 6.2.5 *Para verificar que la fórmula*

$$\varphi : p \rightarrow (q \rightarrow p),$$

del ejemplo (5.6.4) es válida en el sistema de Gentzen podemos usar la regla ($I \neg$) de reducción al absurdo. Tendremos que demostrar que la fórmula $\neg\varphi$ conduce a una contradicción.

En la notación de Fitting:

- 1) $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow p))$ (*Premisa auxiliar*)
- 2) $\vdash \neg(\neg p \vee (q \rightarrow p))$ (*Interdefinición 2(1) y Contraposición (1)*)
- 3) $\vdash \neg\neg p \wedge \neg(q \rightarrow p)$ (*Ley de de Morgan T8.1(2)*)
- 4) $\vdash \neg\neg p$ ($E \wedge(3)$)
- 5) $\vdash \neg(q \rightarrow p)$ ($E \wedge(3)$)
- 6) $\vdash p$ ($E \neg(4)$)
- 7) $\vdash \neg(\neg q \vee p)$ (*Interdefinición 2(5) y Contraposición (5)*)
- 8) $\vdash \neg\neg q \wedge \neg p$ (*Ley de de Morgan T8.3(7)*)
- 9) $\vdash \neg p$ ($E \wedge(8)$)
- 10) $\vdash p \wedge \neg p$ ($I \wedge(6,9)$)

$$11) \vdash p \rightarrow (q \rightarrow p) \quad (I \neg(1,10))$$

Teoremas del conectivo conjunción

- **T10: Propiedad conmutativa**

$$\text{T10.1)} \quad \varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi$$

$$\text{T10.2)} \quad \psi \wedge \varphi \vdash \varphi \wedge \psi$$

- **T11: Propiedad asociativa**

$$\text{T11.1)} \quad \varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$$

$$\text{T11.2)} \quad (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$$

- **T12: Propiedad distributiva**

$$\text{T12.1)} \quad \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$

$$\text{T12.2)} \quad (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \vdash \varphi \wedge (\psi \vee \chi)$$

- **T13: Propiedad de absorción**

$$\text{T13.1)} \quad \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \vdash \varphi$$

De la conjunción de una fórmula φ con su disyunción con cualquier otra fórmula se deduce φ .

$$\text{T13.2)} \quad \varphi \vdash \varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$$

Es la recíproca del anterior: de una fórmula φ se deduce la conjunción de ella con su disyunción con cualquier otra fórmula.

Por ejemplo,

T13.1) de “x es un elemento de A y x es un elemento de A o de B” se deduce que “x es un elemento de A,”

T13.2) de “x es un elemento de A” se deduce que “x es un elemento de A y x es un elemento de A o de B.”

Demostración de T13.1:

Tenemos que verificar que

$$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \vdash \varphi$$

$$1) \quad \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \quad (\text{Premisa})$$

$$2) \quad \vdash \varphi \quad (\text{E } \wedge(1))$$

- **T14: Idempotencia**

$$\text{T14.1)} \quad \varphi \wedge \varphi \vdash \varphi$$

$$\text{T14.2)} \quad \varphi \vdash \varphi \wedge \varphi$$

La demostración de este teorema se propone como ejercicio.

Teoremas del conectivo disyunción

- **T15: Propiedad conmutativa**

$$\text{T15.1)} \quad \varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$$

$$\text{T15.2)} \quad \psi \vee \varphi \vdash \varphi \vee \psi$$

- **T16: Propiedad asociativa**

$$\text{T16.1) } \varphi \vee (\psi \vee \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \vee \chi$$

$$\text{T17.2) } (\varphi \vee \psi) \vee \chi \vdash \varphi \vee (\psi \vee \chi)$$

- **T17: Propiedad distributiva**

$$\text{T17.1) } \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

$$\text{T17.2) } (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$$

- **T18: Propiedad de absorción**

$$\text{T18.1) } \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi$$

De la disyunción de una fórmula φ con su conjunción con cualquier otra fórmula se deduce φ .

$$\text{T18.2) } \varphi \vdash \varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$$

Es la recíproca del anterior: de una fórmula φ se deduce la disyunción de ella con su conjunción con cualquier otra fórmula.

Por ejemplo,

T18.1) de “x es un elemento de A o x es un elemento de A y de B” se deduce que “x es un elemento de A,”

T18.2) de “x es un elemento de A” se deduce que “x es un elemento de A o x es un elemento de A y de B.”

- **T19: Idempotencia**

$$\text{T19.1) } \varphi \vee \varphi \vdash \varphi$$

$$\text{T19.2) } \varphi \vdash \varphi \vee \varphi$$

Teoremas del conectivo coimplicación

- **T20: Introducción de la coimplicación**

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \varphi\} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

La coimplicación (doble implicación) entre dos fórmulas se deduce de las dos implicaciones que tienen estas dos fórmulas como premisa y conclusión y como conclusión y premisa, respectivamente.

La demostración de este teorema se propone como ejercicio.

- **T21: Eliminación de la coimplicación**

$$\text{T21.1) } \varphi \leftrightarrow \psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

$$\text{T21.2) } \varphi \leftrightarrow \psi \vdash \psi \rightarrow \varphi$$

De una coimplicación entre dos fórmulas se deducen las implicaciones de cada una a la otra.

La demostración de este teorema se propone como ejercicio.

- **T22: Propiedad reflexiva**

$$\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$$

Toda fórmula coimplica a sí misma.

- **T23: Propiedad transitiva**

$$\{\varphi \leftrightarrow \psi, \psi \leftrightarrow \chi\} \vdash \varphi \leftrightarrow \chi$$

Si una fórmula φ coimplica a una fórmula ψ y si ψ coimplica a una fórmula χ , entonces φ coimplica a χ .

- **T24: Propiedad simétrica**

$$\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$$

De φ coimplica a ψ se deduce que ψ coimplica a φ .

Observación 6.2.6 Sea R la relación binaria sobre L definida por la coimplicación:

$$(\varphi, \psi) \in R \quad \text{si y sólo si} \quad \varphi \leftrightarrow \psi.$$

La validez de la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva para esta relación implica que R es una relación de equivalencia entre fórmulas proposicionales.

Teoremas del conectivo implicación

- **T25: Importación-Exportación**

$$\text{T25.1)} \quad \{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$$

De una implicación cuya conclusión es la implicación $\psi \rightarrow \chi$ y de la conjunción de las dos premisas $\varphi \wedge \psi$ se deduce la conclusión χ .

$$\text{T25.2)} \quad \{\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$$

Es la recíproca del anterior: de una implicación cuya premisa es la conjunción de dos fórmulas se deduce la implicación de una de las dos premisas a la implicación de la otra premisa a la conclusión.

Ejemplo 6.2.7 Sean

$p =$ n es un número natural,

$q =$ n es par,

$r =$ el cuadrado de n es par.

Entonces,

T25.1) de “si n es número natural, entonces si n es par su cuadrado es par” y de “si n es un número natural y es par”, se deduce que “el cuadrado de n es par,”

T25.2) de “si n es un número natural y es par, entonces su cuadrado es par” y de “ n es número natural, se deduce que “si n es par, su cuadrado es par.”

Demostración de T25.1:

Tenemos que verificar que

$$\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \chi.$$

- 1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ (Premisa)
- 2) $\varphi \wedge \psi$ (Premisa)
- 3) $\vdash \varphi$ (E $\wedge$ (2))
- 4) $\vdash \psi \rightarrow \chi$ (E $\rightarrow$ (3,1))
- 5) $\vdash \psi$ (E $\wedge$ (2))
- 6) $\vdash \chi$ (E $\rightarrow$ (5,4))

- **T26: Mutación de premisa**

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$$

Demostración de T26:

- 1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ (Premisa)

- 2) ψ (Premisa auxiliar)

- 3) φ (Premisa auxiliar)
- 4) $\vdash \psi \rightarrow \chi$ (E $\rightarrow$ (3,1))
- 5) $\vdash \chi$ (E $\rightarrow$ (2,4))

- 6) $\vdash \varphi \rightarrow \chi$ (I $\rightarrow$ (3,5))

- 7) $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ (I $\rightarrow$ (2,6))

- **T27: Carga de premisa**

$$\varphi \vdash (\psi \rightarrow \varphi)$$

Demostración de T27:

- 1) φ (Premisa)

- 2) ψ (Premisa auxiliar)
- 3) $\vdash \varphi$ (Teorema de la identidad, T1(1))

- 4) $\vdash \psi \rightarrow \varphi$ (I $\rightarrow$ (2,3))

- **T28: Modus tollens, MT**

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$$

Notar que esta regla es la contraposición.

Demostración de T28: la demostración es la misma vista en el apartado 1) del ejemplo (6.2.4).

- **T29: Tollendo ponens**

$$\{\varphi \vee \psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$$

Demostración de T29:

- 1) $\varphi \vee \psi$ (Premisa)
- 2) $\neg\psi$ (Premisa)

- 3) φ (Premisa auxiliar)
- 4) $\vdash \varphi$ (Teorema de la identidad, T1(3))

- 5) ψ (Premisa auxiliar)
- 6) $\vdash \psi \wedge \neg\psi$ (I $\wedge$ (2,5))
- 7) $\vdash \varphi$ (Excontraditione Quodlibet, T4(6))

- 8) $\vdash \varphi$ (E $\vee$ (1,(3,4),(5,7)))

- **T30: Dilemas**

T30.1) : Dilema constructivo simple:

$$\{\varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \chi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \chi,$$

T30.2) : Dilema constructivo complejo:

$$\{\varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \chi, \psi \rightarrow \sigma\} \vdash \chi \vee \sigma,$$

T30.3) : Dilema destructivo simple:

$$\{\neg\varphi \vee \neg\psi, \chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\chi,$$

T30.4) : Dilema destructivo complejo:

$$\{\neg\varphi \vee \neg\psi, \chi \rightarrow \varphi, \sigma \rightarrow \psi\} \vdash \neg\chi \vee \neg\sigma,$$

Demostración de T30:

T30.1) : $\{\varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \chi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \chi$

Es la regla de eliminación de la disyunción (E $\vee$).

T30.2) : $\{\varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \chi, \psi \rightarrow \sigma\} \vdash \chi \vee \sigma$

- 1) $\varphi \vee \psi$ (Premisa)
- 2) $\varphi \rightarrow \chi$ (Premisa)
- 3) $\psi \rightarrow \sigma$ (Premisa)

- 4) φ (Premisa auxiliar)
 - 5) $\vdash \chi$ (E $\rightarrow$ (4,2))
 - 6) $\vdash \chi \vee \sigma$ (I $\vee$ (5))

- 7) ψ (Premisa auxiliar)
 - 8) $\vdash \sigma$ (E $\rightarrow$ (7,3))
 - 9) $\vdash \chi \vee \sigma$ (I $\vee$ (8))

- 10) $\vdash \chi \vee \sigma$ (E $\vee$ (1,(4,6),(7,9)))

T30.3) : $\{\neg\varphi \vee \neg\psi, \chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\chi$

- 1) $\neg\varphi \vee \neg\psi$ (Premisa)
- 2) $\chi \rightarrow \varphi$ (Premisa)
- 3) $\chi \rightarrow \psi$ (Premisa)

- 4) $\neg\varphi$ (Premisa auxiliar)
 - 5) $\vdash \neg\chi$ (Modus Tollens, MT(2,4))

- 6) $\neg\psi$ (Premisa auxiliar)
 - 7) $\vdash \neg\chi$ (Modus Tollens, MT(3,6))

- 8) $\vdash \neg\chi$ (E $\vee$ (1,(4,5),(6,7)))

T30.4) : $\{\neg\varphi \vee \neg\psi, \chi \rightarrow \varphi, \sigma \rightarrow \psi\} \vdash \neg\chi \vee \neg\sigma$

- 1) $\neg\varphi \vee \neg\psi$ (Premisa)
- 2) $\chi \rightarrow \varphi$ (Premisa)
- 3) $\sigma \rightarrow \psi$ (Premisa)

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 4) $\neg\varphi$ (Premisa auxiliar) 5) $\vdash \neg\chi$ (Modus Tollens, MT(2,4)) 6) $\vdash \neg\chi \vee \neg\sigma$ (I $\vee$(5)) |
|--|

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 7) $\neg\psi$ (Premisa auxiliar) 8) $\vdash \neg\sigma$ (Modus Tollens, MT(3,7)) 9) $\vdash \neg\chi \vee \neg\sigma$ (I $\vee$(8)) |
|---|

- 10) $\vdash \neg\chi \vee \neg\sigma$ (E $\vee$ (1,(4,6),(7,9)))

En la sección (6.4) veremos que existen teoremas que demuestran la equivalencia entre la teoría interpretativa (semántica) y el sistema de deducción natural.

Esta equivalencia entre teorías nos permite elegir, en cada caso, entre el método más adecuado o eficiente para desarrollar una demostración.

6.3 Tableaux sintácticos

Podemos observar que la definición recursiva de tableaux semántico asociado a un conjunto de fórmulas no requiere, en ningún paso, el cálculo de los valores de verdad de las fórmulas consideradas. Eso quiere decir que el método de refutación de los tableaux es, en realidad, un método de demostración sintáctico.

Los **tableaux sintácticos** usan el método de refutación para derivar la validez de un razonamiento o de una fórmula, sin tener que tomar en consideración los valores de verdad de las fórmulas en estudio. Permiten demostrar teoremas y deducciones.

Ejemplo 6.3.1 *En el ejemplo (5.6.9) demostramos la implicación lógica*

$$\{p \wedge q \rightarrow r, \neg r, p\} \models \neg q.$$

Teniendo en cuenta las equivalencias entre fórmulas definidas por la coimplicación de la teoría axiomática, la misma secuencia de tableaux empleada en

ese ejemplo demuestra la deducción

$$\{p \wedge q \rightarrow r, \neg r, p\} \vdash \neg q,$$

o, por el teorema de la deducción, el teorema

$$\vdash (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (\neg r \rightarrow (p \rightarrow \neg q)).$$

6.4 Completitud, corrección y decidibilidad

Para cualquier sistema axiomático es siempre imprescindible estudiar si éste cumple las tres propiedades de completitud, corrección y decidibilidad. Las dos primeras propiedades permiten estudiar la relación del sistema con la semántica del lenguaje y la tercera es una propiedad algorítmica.

Las demostraciones de la validez de estas propiedades para los sistemas de la lógica proposicional son complejas y fuera del alcance de esta asignatura. Nos limitaremos a enunciar los principales teoremas relacionados.

- **Completitud**

Se dice que un sistema de demostración axiomático es **completo** si es capaz de demostrar cualquier fórmula semánticamente válida (una tautología) y deducir cualquier consecuencia lógica.

Teorema de Kalmar [A]: toda tautología en teoría interpretativa es una fórmula válida en teoría de la demostración.

El sistema de Gentzen es completo.

Considerando la definición sintáctica de la teoría de los tableaux para un conjunto arbitrario de fórmulas (posiblemente infinito), se puede demostrar que el sistema axiomático así obtenido es completo [HLR].

- **Corrección**

Se dice que un sistema de demostración es **correcto (consistente, coherente)** si todas las fórmulas demostrables en el sistema son tautologías y todas las fórmulas deducibles en el sistema a partir de un conjunto de premisas son consecuencia lógica de dichas premisas.

Teorema de Post [A]: toda fórmula válida en teoría de la demostración es una tautología en teoría interpretativa.

El sistema de Gentzen y la definición sintáctica de la teoría de los tableaux son sistemas correctos [HLR] y [MH].

- **Decidibilidad**

Se dice que un sistema de demostración es **decidible** si proporciona un procedimiento general y finito (aplicable a cualquier fórmula y que termine) que permita decidir si una fórmula es válida o deducible a partir de un conjunto de fórmulas.

Los teoremas anteriores permiten afirmar que una fórmula proposicional es un teorema si y sólo si es una tautología.

Por tanto la evaluación de la tabla de verdad es un procedimiento general y finito de decisión de la validez de una fórmula [A].

Es también posible demostrar que el método de los tableaux, en su definición más general, tiene las mismas propiedades de generalidad y finitud [HLR] que las tablas de verdad.

Se sigue que los sistemas formales de la lógica proposicionales son decidibles.

En conclusión, los sistemas formales de la lógica proposicional (la lógica de orden 0) son completos, correctos y decidibles.

Las lógicas de orden superior son más generales, pero pierden algunas de estas propiedades. Veremos que la lógica de predicados (de primer orden) es completa y correcta, pero no es decidible.

6.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.5.1 Usando el sistema de deducción natural, demuestra la idempotencia de la conjunción (T14), la introducción del coimplicador (T20) y la eliminación del coimplicador (T21). Vuelve a comprobar si eres capaz de demostrar todas las reglas derivadas del sistema de Gentzen.

Ejercicio 6.5.2 Prueba que las siguientes equivalencias semánticas son también coimplicaciones demostrables en el sistema de deducción natural:

1. $\neg\neg p \equiv p$
2. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
3. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
4. $(p \rightarrow q) \equiv \neg p \vee q$
5. $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

Ejercicio 6.5.3 Formaliza los siguientes razonamientos:

1. Si llueve no iré al mercado. Si no iré al mercado, o bien no tendré comida o bien iré al restaurante. Llueve y tengo comida. Por lo tanto: iré al restaurante.
2. Si f es diferenciable en $[a, b]$, es continua y acotada en $[a, b]$. Si f no fuese acotada en $[a, b]$ no podría ser diferenciable en $[a, b]$. Por tanto: si f es discontinua y acotada en $[a, b]$, no es diferenciable en $[a, b]$.

Ejercicio 6.5.4 Usando el sistema de deducción natural, prueba (si es posible) la validez de los razonamientos anteriores.

Ejercicio 6.5.5 Usando el sistema de deducción natural, demuestra la validez de las siguientes deducciones:

1. $\{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg(p \vee r) \rightarrow s, p \rightarrow q\} \vdash \neg s \rightarrow r$
2. $\{r \rightarrow p, \neg q \rightarrow \neg r, s \rightarrow q, (p \wedge q) \rightarrow t, \neg s \vee p\} \vdash (r \vee s) \rightarrow t$
3. $\{p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg s \vee p, q\} \vdash s \rightarrow r$
4. $\{s \rightarrow (t \rightarrow u), u \rightarrow \neg u, (v \rightarrow s) \wedge (p \rightarrow t)\} \vdash v \rightarrow \neg p$

Ejercicio 6.5.6 En el contexto de la lógica proposicional y usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de las deducciones:

$$\begin{aligned} &\{p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s \wedge r\} \vdash r, \\ &\{p \vee q, p \rightarrow r \vee \neg t, q \rightarrow s \wedge r\} \vdash t \rightarrow r, \\ &\{p \vee q \rightarrow \neg(q \wedge t), \neg s \rightarrow q\} \vdash p \wedge t \rightarrow s. \end{aligned}$$

Ejercicio 6.5.7 Demuestra, utilizando el sistema de deducción natural de Gentzen, que el siguiente razonamiento es válido:

$$\{r \rightarrow q, u \vee \neg p, u \rightarrow t, r \vee s, \neg q \rightarrow \neg s\} \vdash q \wedge (p \rightarrow t).$$

Ejercicio 6.5.8 Demuestra la siguiente deducción usando el sistema natural de Gentzen. Puedes utilizar libremente los 30 teoremas válidos enunciados en teoría sin necesidad de demostrarlos.

$$\{p \wedge q \rightarrow r, \neg p \rightarrow s\} \vdash q \rightarrow r \vee s.$$

Ejercicio 6.5.9 Formaliza el siguiente razonamiento con el lenguaje de la lógica proposicional y prueba su validez usando el sistema de deducción natural de Gentzen. Puedes utilizar libremente los 30 teoremas válidos enunciados en teoría sin necesidad de demostrarlos.

Si Beatriz sale de compras, hoy comeremos patatas. Beatriz sale de compras si tiene dinero. Ella no compra marisco a menos que tenga dinero. No ocurre que no tenga dinero y haya cobrado. O ha cobrado o compra marisco. Por tanto, comeremos patatas o carne.

Ejercicio 6.5.10 Demuestra el siguiente par de deducciones (propiedad distributiva de la disyunción respecto de la conjunción) usando el sistema natural de Gentzen. Utiliza sólo las ocho reglas de inferencia del sistema.

- a) $\varphi \vee (\psi \wedge \xi) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \xi).$
- b) $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \xi) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \xi).$

Capítulo 7

Problemas de repaso sobre lógica proposicional resueltos

Este capítulo contiene los textos y las soluciones de varios exámenes, que incluimos para que puedan ser usados como repaso la lógica proposicional.

Es muy importante que el alumno intente resolver todos los problemas presentados en el tiempo indicado en cada examen.

7.1 Examen parcial 2005-2006

Fecha: 12 de diciembre de 2005 **Tiempo:** 1 hora

El examen está formado por cuatro problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre cinco puntos.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

1) Usando la lógica proposicional, formaliza los siguientes enunciados (se necesitan sólo tres proposiciones atómicas):

- a) Iremos a Portugal y visitaremos Lisboa sólo si no hace mucho frío.
- b) No iremos a Portugal a menos que no haga mucho frío.
- c) Si no hace mucho frío, visitaremos Lisboa.
- d) O bien hace mucho frío, o bien iremos a Portugal.
- e) No iremos a Portugal, si no vamos a visitar Lisboa o si hace mucho frío.

2) Mediante una tabla de verdad, verifica si las dos fórmulas

$$\varphi_1 : \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg r \quad \text{y} \quad \varphi_2 : p \vee q \vee \neg r,$$

son lógicamente equivalentes.

3) En el sistema de Gentzen, estudia la validez de la deducción

$$\{r \vee p \rightarrow \neg p, p \rightarrow q, \neg q \vee p\} \vdash \neg p.$$

4) Sea $\varphi : (p \vee q \rightarrow r) \vee (t \rightarrow q)$.

Usando tableaux, halla las formas normales disyuntiva y conjuntiva de φ .

7.2 Soluciones del examen parcial 2005-2006

Fecha: 12 de diciembre de 2005

Tiempo: 1 hora

1) Usando la lógica proposicional, formaliza los siguientes enunciados (se necesitan sólo tres proposiciones atómicas):

- a) Iremos a Portugal y visitaremos Lisboa sólo si no hace mucho frío.
- b) No iremos a Portugal a menos que no haga mucho frío.
- c) Si no hace mucho frío, visitaremos Lisboa.
- d) O bien hace mucho frío, o bien iremos a Portugal.
- e) No iremos a Portugal, si no vamos a visitar Lisboa o si hace mucho frío.

Solución: Sean $\{p, q, r\}$ las siguientes proposiciones atómicas:

p = iremos a Portugal,

q = visitaremos Lisboa,

r = hace mucho frío.

Entonces,

- a) “Iremos a Portugal y visitaremos Lisboa sólo si no hace mucho frío” se escribe $p \wedge q \rightarrow \neg r$,
- b) “No iremos a Portugal a menos que no haga mucho frío” se escribe $p \rightarrow \neg r$,
- c) “Si no hace mucho frío, visitaremos Lisboa” se escribe $\neg r \rightarrow q$,
- d) “O bien hace mucho frío, o bien iremos a Portugal” se escribe $r \vee p$,
- e) “No iremos a Portugal, si no vamos a visitar Lisboa o si hace mucho frío” se escribe $\neg p \vee r \rightarrow \neg p$.

2) Mediante una tabla de verdad, verifica si las dos fórmulas

$$\varphi_1 : \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg r \quad \text{y} \quad \varphi_2 : p \vee q \vee \neg r,$$

son lógicamente equivalentes.

Solución: Con la tabla de verdad de la figura 7.1 verificamos que $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ no es una tautología, ya que tiene dos contraejemplo:

$$(p = 0, q = 1, r = 1) \quad \text{y} \quad (p = 1, q = 0, r = 1).$$

Se sigue que φ_1 y φ_2 no son lógicamente equivalentes.

3) En el sistema de Gentzen, estudia la validez de la deducción

$$\{r \vee p \rightarrow \neg p, p \rightarrow q, \neg q \vee p\} \vdash \neg p.$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg p \vee \neg q$	φ_1	φ_2	$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1

Tabla 7.1: Tabla de verdad del ejercicio 2

Solución:

1) $r \vee p \rightarrow \neg p$ (Premisa)

2) $p \rightarrow q$ (Premisa)

3) $\neg q \vee p$ (Premisa)

4) $\vdash \neg \neg p$ (Premisa auxiliar)

5) $\vdash p$ (E $\neg$ (4))

6) $\vdash r \vee p$ (I $\vee$ (5))

7) $\vdash \neg p$ (E $\rightarrow$ (6,1))

8) $\vdash p \wedge \neg p$ (I $\wedge$ (5,7))

9) $\vdash \neg p$ (I $\neg$ (4,8))

La deducción $\{r \vee p \rightarrow \neg p, p \rightarrow q, \neg q \vee p\} \vdash \neg p$ es válida.

4) Sea $\varphi : (p \vee q \rightarrow r) \vee (t \rightarrow q)$.

Usando tableaux, halla las formas normales disyuntiva y conjuntiva de φ .

Solución: Por medio de equivalencias, podemos reescribir φ como:

$$\varphi \equiv \neg(p \vee q) \vee r \vee \neg t \vee q \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r \vee \neg t \vee q \equiv FND(\varphi).$$

Notar que, en general, para hallar la forma normal disyuntiva de un fórmula proposicional tenemos que dibujar su tableau. En nuestro caso particular hemos obtenido esa forma per medio de la simple aplicación de equivalencias lógicas.

Entonces,

$$\begin{aligned} \neg \varphi &\equiv \neg FND(\varphi) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg r \wedge \neg \neg t \wedge \neg q \equiv \\ &\equiv (p \vee q) \wedge \neg r \wedge t \wedge \neg q. \end{aligned}$$

Para hallar las forma normal conjuntiva de φ , $FNC(\varphi) \equiv \neg FND(\neg \varphi)$, necesitamos dibujar el tableau de $\neg \varphi$, representado en la figura 7.1.

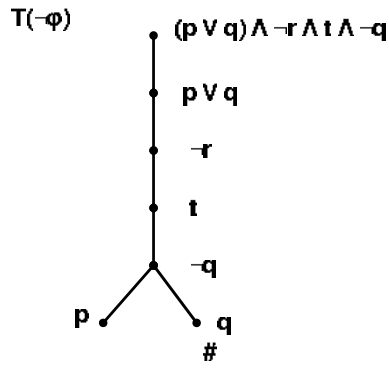


Figura 7.1: Tableaux acabados de $\neg\varphi$ del problema 4

Usando los literales de la primera rama (la única rama abierta) del tableau, obtenemos que

$$FNC(\varphi) \equiv \neg FND(\neg\varphi) \equiv \neg(p \wedge \neg q \wedge t \wedge \neg r) \equiv \neg p \vee q \vee \neg t \vee r.$$

Notar que, en nuestro caso, la forma normal conjuntiva de φ consiste de una única cláusula disyuntiva.

7.3 Primer examen parcial 2006-2007

Fecha: 21 de noviembre de 2006

Tiempo: 1 hora y media

El examen está formado por tres problemas. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1) Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales.

Sobre L , sea $R \subseteq L \times L$ la relación binaria definida por:

$$(\varphi, \psi) \in R \quad \text{si y sólo si} \quad \varphi \models \psi.$$

a) (3 puntos) Verifica si R es reflexiva, simétrica o transitiva.

b) (1 punto) Determina si R es una relación de equivalencia.

2) Considera las siguientes dos frases:

φ : “Hoy no hace frío ni calor y no iré al parque a menos que no llueva.”

ψ : “Es imposible que: o bien hoy hace frío, o bien hace calor, o bien iré al parque a pesar de que llueva.”

a) (2 puntos) Formaliza φ y ψ en la lógica proposicional.

b) (1 puntos) Dibuja los árboles estructurales de las fórmulas proposicionales φ y ψ obtenidas en el apartado a).

c) (3 puntos) Mediante una tabla de verdad, verifica si φ y ψ son lógicamente equivalentes.

3) (5 puntos) Siendo p, q, r y s proposiciones atómicas, estudia la validez del siguiente razonamiento usando el método de los tableaux:

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ p \wedge (r \rightarrow s) \\ \neg p \vee s \end{array}}{q \vee r}$$

Si el razonamiento no es válido, halla un contraejemplo.

7.4 Soluciones del primer examen parcial 2006-2007

Fecha: 21 de noviembre de 2006

Tiempo: 1 hora y media

1) Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales.

Sobre L , sea $R \subseteq L \times L$ la relación binaria definida por:

$$(\varphi, \psi) \in R \text{ si y sólo si } \varphi \models \psi.$$

a) (3 puntos) Verifica si R es reflexiva, simétrica o transitiva.

b) (1 punto) Determina si R es una relación de equivalencia.

Solución:

a) L es reflexiva ya que $\varphi \models \varphi$ para toda $\varphi \in L$, siendo $\varphi \rightarrow \varphi$ una tautología (si $\varphi = 1$, $\varphi \rightarrow \varphi$ es verdadera).

L no es simétrica ya que, por ejemplo, siendo $\varphi = p \wedge q$ y $\psi = p$, se verifica que $\varphi \models \psi$ (si $p \wedge q = 1$, entonces tiene que ser $p = 1$). Sin embargo, $\psi = p$ no implica lógicamente $\varphi = p \wedge q$ (si $p = 1$ y $q = 0$, $p \rightarrow p \wedge q$ es falsa).

L es transitiva: sean $\chi \in L$, $\varphi \models \psi$ y $\psi \models \chi$. Entonces, $\varphi = 1$ implica $\psi = 1$ (siendo cierto que $\varphi \models \psi$) y $\psi = 1$ implica $\chi = 1$ (siendo cierto que $\psi \models \chi$). Por tanto, $\varphi \models \chi$ ($\varphi = 1$ implica $\chi = 1$).

b) La relación R no es simétrica y, por tanto, no es una relación de equivalencia.

2) Considera las siguientes dos frases:

φ : “Hoy no hace frío ni calor y no iré al parque a menos que no llueva.”

ψ : “Es imposible que: o bien hoy hace frío, o bien hace calor, o bien iré al parque a pesar de que llueva.”

a) (2 puntos) Formaliza φ y ψ en la lógica proposicional.

b) (1 punto) Dibuja los árboles estructurales de las fórmulas proposicionales φ y ψ obtenidas en el apartado a).

c) (3 puntos) Mediante una tabla de verdad, verifica si φ y ψ son lógicamente equivalentes.

Solución:

a) Consideremos las siguientes fórmulas proposicionales:

p =hoy hace frío, q = hoy hace calor, r = hoy iré al parque, s = hoy llueve.

Entonces,

$$\varphi : (\neg p \wedge (\neg q \wedge (r \rightarrow \neg s))) \quad \text{y} \quad \psi : \neg(p \vee (q \vee (r \wedge s))).$$

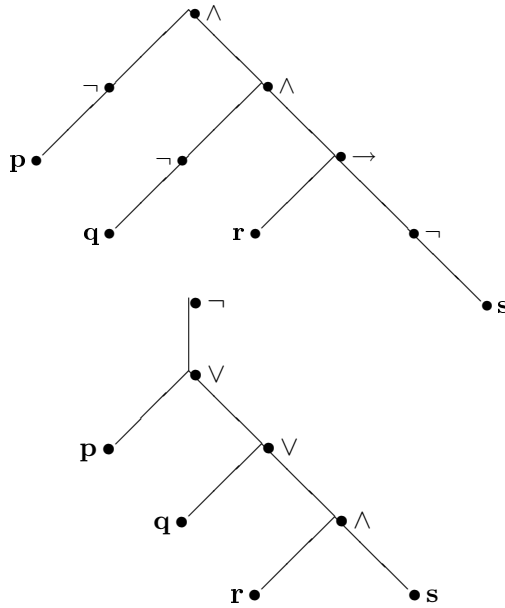


Figura 7.2: Árboles estructurales de φ y ψ

- b) Los árboles estructurales de φ y ψ están representados en la figura 7.2:
c) En la tabla 7.2 verificamos que $\varphi \leftrightarrow \psi$ es una tautología. Por tanto φ y ψ son lógicamente equivalentes.

3) (5 puntos) Siendo p , q , r y s proposiciones atómicas, estudia la validez del siguiente razonamiento usando el método de los tableaux:

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ p \wedge (r \rightarrow s) \\ \neg p \vee s \end{array}}{q \vee r}$$

Si el razonamiento no es válido, halla un contraejemplo.

Solución:

Usando las equivalencias

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv \neg p \vee \neg q \vee r \quad y$$

$$p \wedge (r \rightarrow s) \equiv p \wedge (\neg r \vee s),$$

podemos escribir el razonamiento en la forma

$$\varphi = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \wedge (\neg r \vee s)) \wedge (\neg p \vee s) \rightarrow q \vee r.$$

p	q	r	s	$\neg p$	$\neg q$	$\neg s$	$r \rightarrow \neg s$	φ	$r \wedge s$	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1

Tabla 7.2: Tabla de verdad del ejercicio 2

Entonces,

$$\begin{aligned}\neg\varphi &= (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \wedge (\neg r \vee s)) \wedge (\neg p \vee s) \wedge \neg(q \vee r) \equiv \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge p \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee s) \wedge \neg q \wedge \neg r.\end{aligned}$$

La figura 7.3 representa el tableau $T(\neg\varphi)$ acabado asociado a $\neg\varphi$.

Ya que $T(\neg\varphi)$ no es cerrado, $\neg\varphi$ no es una contradicción y, por tanto, φ no es una tautología y el razonamiento dado no es válido.

La rama completa abierta de $T(\neg\varphi)$ nos proporciona un contraejemplo para el razonamiento:

$$s = 1, \quad r = 0, \quad q = 0, \quad p = 1.$$

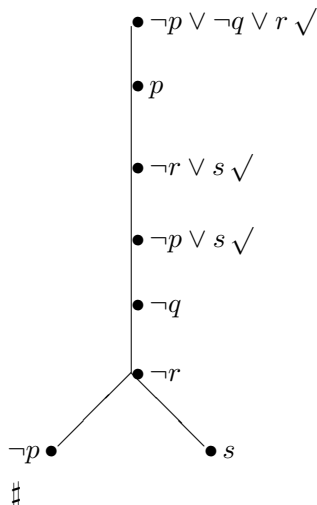


Figura 7.3: Tableau acabado de $\neg\varphi$

7.5 Examen parcial opcional 2006-2007

Fecha: 12 de diciembre de 2006

Tiempo: 50 minutos

El examen está formado por dos problemas. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1) (8 puntos) Usando el método de los tableaux, clasifica y halla la forma normal conjuntiva de la fórmula:

$$\varphi : (p \rightarrow r \vee s) \wedge \neg(q \rightarrow s \wedge p) \rightarrow \neg r,$$

donde p , q , r y s son proposiciones atómicas.

2) (7 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, verifica la validez del siguiente razonamiento:

$$\{p \rightarrow \neg r \vee s, \neg r \rightarrow s \wedge \neg t, p \rightarrow t, t \rightarrow \neg s\} \vdash \neg p,$$

donde p , r , s y t son proposiciones atómicas.

7.6 Soluciones del examen parcial opcional 2006-2007

Fecha: 12 de diciembre de 2006

Tiempo: 50 minutos

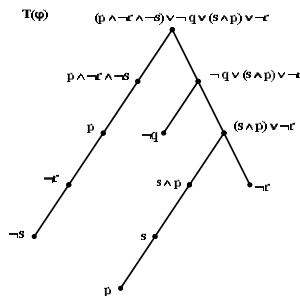


Figura 7.4: Tableau acabado de φ

1) (8 puntos) Usando el método de los tableaux, clasifica y halla la forma normal conjuntiva de la fórmula:

$$\varphi : (p \rightarrow r \vee s) \wedge \neg(q \rightarrow s \wedge p) \rightarrow \neg r,$$

donde p , q , r y s son proposiciones atómicas.

Solución:

$$\begin{aligned} \varphi : (p \rightarrow r \vee s) \wedge \neg(q \rightarrow s \wedge p) \rightarrow \neg r &\equiv \neg((\neg p \vee r \vee s) \wedge \neg(\neg q \vee (s \wedge p))) \vee \neg r \equiv \\ &\equiv (p \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg q \vee (s \wedge p)) \vee \neg r \equiv (p \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee \neg q \vee (s \wedge p) \vee \neg r = FND(\varphi) \end{aligned}$$

Siendo $T(\varphi)$ abierto (ver figura 7.4), φ es satisfacible.

$$\begin{aligned} \neg\varphi : \neg((p \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee \neg q \vee (s \wedge p) \vee \neg r) &\equiv \neg(p \wedge \neg r \wedge \neg s) \wedge q \wedge \neg(s \wedge p) \wedge r \equiv \\ &\equiv (\neg p \vee r \vee s) \wedge q \wedge (\neg s \vee \neg p) \wedge r = FNC(\neg\varphi) \end{aligned}$$

Siendo $T(\neg\varphi)$ abierto (ver figura 7.5), φ es una contingencia.

$$FND(\neg\varphi) = (\neg s \wedge r \wedge q) \vee (\neg p \wedge r \wedge q).$$

$$\begin{aligned} FNC(\varphi) &= \neg FND(\neg\varphi) = \neg(\neg s \wedge r \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge r \wedge q) \equiv \\ &\equiv (s \vee \neg r \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg q). \end{aligned}$$

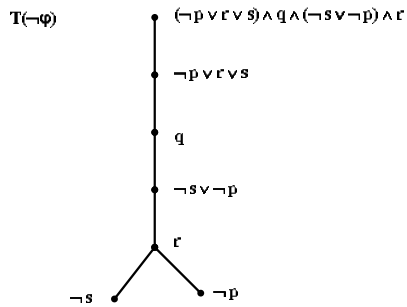


Figura 7.5: Tableau acabado de $\neg\varphi$

2) (7 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, verifica la validez del siguiente razonamiento:

$$\{p \rightarrow \neg r \vee s, \neg r \rightarrow s \wedge \neg t, p \rightarrow t, t \rightarrow \neg s\} \vdash \neg p,$$

donde p , r , s y t son proposiciones atómicas.

Solución:

- 1) $p \rightarrow \neg r \vee s$ (Premisa)
- 2) $\neg r \rightarrow s \wedge \neg t$ (Premisa)
- 3) $p \rightarrow t$ (Premisa)
- 4) $t \rightarrow \neg s$ (Premisa)
- 5) $\vdash p \rightarrow \neg s$ (Regla del silogismo T2 (3,4))

- 6) $\neg \neg p$ (Premisa auxiliar)
- 7) $\vdash p$ (E $\neg$ (6))
- 8) $\vdash \neg s$ (E $\rightarrow$ (7,5))
- 9) $\vdash \neg r \vee s$ (E $\rightarrow$ (7,1))
- 10) $\vdash \neg r$ (Tollendo Ponens (8,9))
- 11) $\vdash s \wedge \neg t$ (E $\rightarrow$ (10,2))
- 12) $\vdash s$ (E $\wedge$ (11))
- 13) $\vdash \neg s \wedge s$ (I $\wedge$ (8,12))

- 14) $\neg p$ (I $\neg$ (6,13))

El razonamiento es válido.

7.7 Primer examen parcial A 2007-2008

Fecha: 5 de noviembre de 2007

Tiempo: 1 hora y 15 minutos

El examen está formado por cuatro problemas. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1) Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) (1 punto) Si una fórmula φ es satisfacible, entonces la fórmula $\varphi \wedge \psi$ es satisfacible para toda fórmula ψ .

b) (1 punto) Si una fórmula φ es insatisfacible, entonces la fórmula $\varphi \rightarrow \psi$ es una contradicción para toda fórmula ψ .

2) (4 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales. Define la función f que a cada fórmula proposicional φ asocia el número de hojas (el número de vértices, distintos de la raíz, que tienen grado 1) de su árbol sintáctico.

3) (4 puntos) Determina si la dos fórmulas

$$\varphi_1 : (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow s \quad \varphi_2 : (\neg p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$$

son equivalentes y dibuja sus árboles sintácticos.

4) Considera el siguiente razonamiento:

Si x es positivo, existe su raíz cuadrada. La raíz cuarta de x existe sólo si x es positivo. Por tanto, x es positivo si y sólo si existe su raíz cuarta.

a) (2 puntos) Formaliza el razonamiento anterior en la lógica proposicional.

b) (3 puntos) Por medio de equivalencia de fórmulas, halla una fórmula proposicional equivalente al razonamiento y tal que contenga sólo los conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

7.8 Primer examen parcial B 2007-2008

Fecha: 5 de noviembre de 2007

Tiempo: 1 hora y 15 minutos

El examen está formado por cuatro problemas. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1) Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) (1 punto) Si una fórmula φ es satisfacible, entonces la fórmula $\varphi \vee \psi$ es satisfacible para toda fórmula ψ .

b) (1 punto) Si una fórmula ψ es insatisfacible, entonces la fórmula $p \rightarrow \psi$ es una contradicción para toda proposición atómica p .

2) (4 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales. Define la función f que a cada fórmula proposicional φ asocia el número de hojas (el número de vértices, distintos de la raíz, que tienen grado 1) de su árbol sintáctico.

3) (4 puntos) Determina si la dos fórmulas

$$\varphi_1 : (\neg p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \quad \varphi_2 : (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow s$$

son equivalentes y dibuja sus árboles sintácticos.

4) Considera el siguiente razonamiento:

Si x es negativo, existe su raíz cúbica. La raíz novena de x existe sólo si x es negativo. Por tanto, x es negativo si y sólo si existe su raíz novena.

a) (2 puntos) Formaliza el razonamiento anterior en la lógica proposicional.

b) (3 puntos) Por medio de equivalencia de fórmulas, halla una fórmula proposicional equivalente al razonamiento y tal que contenga sólo los conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

7.9 Soluciones de los primeros exámenes parciales A y B 2007-2008

Fecha: 5 de noviembre de 2007

Tiempo: 1 hora y 15 minutos

1 A) Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) (1 punto) Si una fórmula φ es satisfacible, entonces la fórmula $\varphi \wedge \psi$ es satisfacible para toda fórmula ψ .

b) (1 punto) Si una fórmula φ es insatisfacible, entonces la fórmula $\varphi \rightarrow \psi$ es una contradicción para toda fórmula ψ .

Solución:

a) FALSA: si la fórmula ψ es una contradicción (insatisfacible), la fórmula $\varphi \wedge \psi$ también lo es. Por tanto, en este caso, $\varphi \wedge \psi$ no sería satisfacible.

b) FALSA: si la fórmula φ es insatisfacible, entonces la fórmula $\varphi \rightarrow \psi$ es una tautología para toda fórmula ψ , ya que es una implicación con premisa siempre falsa.

1 B) Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) (1 punto) Si una fórmula φ es satisfacible, entonces la fórmula $\varphi \vee \psi$ es satisfacible para toda fórmula ψ .

b) (1 punto) Si una fórmula ψ es insatisfacible, entonces la fórmula $p \rightarrow \psi$ es una contradicción para toda proposición atómica p .

Solución:

a) VERDADERA: si la fórmula φ es satisfacible, la fórmula $\varphi \vee \psi$ también lo es, ya que un modelo de φ es también un modelo de $\varphi \vee \psi$.

b) FALSA: si la proposición atómica p es falsa, entonces la fórmula $p \rightarrow \psi$ es verdadera para toda fórmula ψ , ya que es una implicación con premisa falsa. Se sigue que $p \rightarrow \psi$ es satisfacible.

2 A y B) (4 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales. Define la función f que a cada fórmula proposicional φ asocia el número de hojas (el número de vértices, distintos de la raíz, que tienen grado 1) de su árbol sintáctico.

Solución: Por el principio de recursión estructural, es suficiente definir la función

$$f : L \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

de la siguiente manera:

Base: (At): $f(\top) = f(\perp) = f(p) = 0$, para toda proposición atómica p .

Pasos recursivos:

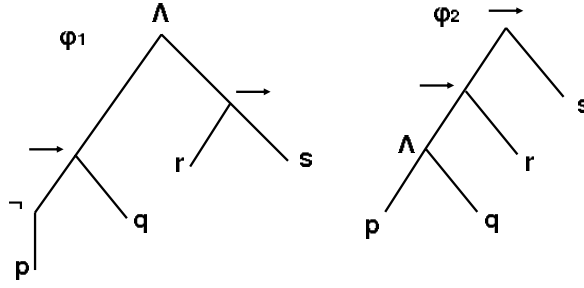


Figura 7.6: Árboles sintácticos de φ_1 y φ_2 del ejercicio 3.

$$\begin{aligned}
 (\neg): f(\neg\varphi) &= \begin{cases} f(\varphi) & \text{si } \varphi \text{ no es atómica,} \\ f(\varphi) + 1 & \text{si } \varphi \text{ es atómica.} \end{cases} \\
 (\varphi \circ \psi): f(\varphi \circ \psi) &= \begin{cases} f(\varphi) + f(\psi) & \text{si } \varphi \text{ y } \psi \text{ no son atómicas,} \\ f(\varphi) + f(\psi) + 1 & \text{si sólo una de } \varphi \text{ y } \psi \text{ es atómica,} \\ 2 & \text{si } \varphi \text{ y } \psi \text{ son atómicas.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

3 A) (4 puntos) Determina si la dos fórmulas

$$\varphi_1 : (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow s \quad \varphi_2 : (\neg p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$$

son equivalentes y dibuja sus árboles sintácticos.

Solución:

Bajo la valoración $p = 0, q = 0, r = 1, s = 0$ la fórmula φ_1 es verdadera ($p \wedge q \rightarrow r$ es una premisa falsa) y la fórmula φ_2 es falsa ($r \rightarrow s$ es falsa siendo su premisa verdadera y su conclusión falsa). Se sigue que las dos fórmulas no son equivalentes, ya que toman valores de verdad distintos bajo una misma valoración.

La figura 7.6 representa los árboles sintácticos de las dos fórmulas.

3 B) (4 puntos) Determina si la dos fórmulas

$$\varphi_1 : (\neg p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \quad \varphi_2 : (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow s$$

son equivalentes y dibuja sus árboles sintácticos.

Solución: La solución es la misma que en la versión A, intercambiando los nombres de las dos fórmulas.

4 A) Considera el siguiente razonamiento:

Si x es positivo, existe su raíz cuadrada. La raíz cuarta de x existe sólo si x es positivo. Por tanto, x es positivo si y sólo si existe su raíz cuarta.

a) (2 puntos) Formaliza el razonamiento anterior en la lógica proposicional.

b) (3 puntos) Por medio de equivalencia de fórmulas, halla una fórmula proposicional equivalente al razonamiento y tal que contenga sólo los conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

Solución:

a) Consideremos las siguientes proposiciones atómicas: $p = x$ es positivo, $q =$ existe la raíz cuadrada de x , $r =$ existe la raíz cúbica de x .

Con estas proposiciones atómicas, la formalización del razonamiento es:

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow r).$$

b)

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow r) \equiv \\ & \equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee p)) \vee ((\neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee p)) \equiv \\ & \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg r \vee p) \vee ((\neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee p)) \equiv \\ & \equiv (p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg p) \vee ((\neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee p)). \end{aligned}$$

4 B) Considera el siguiente razonamiento:

Si x es negativo, existe su raíz cúbica. La raíz novena de x existe sólo si x es negativo. Por tanto, x es negativo si y sólo si existe su raíz novena.

a) (2 puntos) Formaliza el razonamiento anterior en la lógica proposicional.

b) (3 puntos) Por medio de equivalencia de fórmulas, halla una fórmula proposicional equivalente al razonamiento y tal que contenga sólo los conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

Solución:

a) Consideremos las siguientes proposiciones atómicas: $p = x$ es negativo, $q =$ existe la raíz cúbica de x , $r =$ existe la raíz novena de x .

Con estas proposiciones atómicas, la formalización del razonamiento es:

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow r).$$

b) Siendo la formalización del razonamiento la misma que en la versión A de este ejercicio, la fórmula equivalente al razonamiento resultante es también la misma:

$$(p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg p) \vee ((\neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee p)).$$

7.10 Primer examen parcial 2008-2009

Fecha: 10 de noviembre de 2008

Tiempo: 50 min

El examen está formado por cuatro problemas. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1) Siendo φ_1, φ_2 y φ_3 , tres fórmulas proposicionales, determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justifica tus respuestas):

a) (1 punto) Si el conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es satisfacible, entonces la fórmula $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \varphi_3$ es satisfacible.

b) (1 punto) Si φ_2 es insatisfacible, entonces la fórmula $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ es una contradicción.

c) (1 punto) $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ si y sólo si $\neg\varphi_1 \equiv \neg\varphi_2$.

2) (3 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales y sea ψ una tautología. Sobre L , considera la relación binaria R definida por:

$$(\varphi_1, \varphi_2) \in R \quad \text{si y sólo si} \quad \neg\varphi_1 \models \varphi_2.$$

Verifica que, para toda fórmula proposicional φ ,

$$(\varphi, \varphi \rightarrow \psi) \in R.$$

¿Hace falta usar el principio de inducción estructural?

3) (5 puntos) En la lógica proposicional, formaliza y dibuja el árbol sintáctico del siguiente razonamiento:

$\ln(x)$ es un número real sólo si x es un número real positivo. $\ln(x)$ es un número real no positivo si y sólo si x es un número real positivo menor o igual a 1. Por tanto, si x es un número real positivo menor o igual que 1, $\ln(x)$ es un número real no positivo.

4) (4 puntos) Determina si el conjunto de fórmulas $\{p \leftrightarrow q, p \vee q\}$ implica lógicamente la fórmula $p \wedge q$.

7.11 Soluciones del primer examen parcial 2008-2009

Fecha: 10 de noviembre de 2008

Tiempo: 50 min

1) Siendo φ_1, φ_2 y φ_3 , tres fórmulas proposicionales, determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justifica tus respuestas):

a) (1 punto) Si el conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es satisfacible, entonces la fórmula $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \varphi_3$ es satisfacible.

b) (1 punto) Si φ_2 es insatisfacible, entonces la fórmula $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ es una contradicción.

c) (1 punto) $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ si y sólo si $\neg\varphi_1 \equiv \neg\varphi_2$.

Solución:

a) VERDADERA: Si el conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es satisfacible, entonces existe una valoración v tal que $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)^v = 1$. Bajo esa valoración v , la fórmula $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \varphi_3$ es verdadera, ya que su premisa y conclusión son verdaderas. Se sigue que la fórmula $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \varphi_3$ es satisfacible.

b) FALSA: Si, por ejemplo, φ_1 es una fórmula atómica p , entonces la fórmula $p \rightarrow \varphi_2$ es verdadera bajo cualquier valoración con $p = 0$.

c) VERDADERA: $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ si y sólo si las fórmulas φ_1 y φ_2 toman el mismo valor de verdad bajo cualquier valoración. Por tanto, también $\neg\varphi_1$ y $\neg\varphi_2$ toman el mismo valor de verdad bajo cualquier valoración, es decir, $\neg\varphi_1 \equiv \neg\varphi_2$.

2) (3 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas proposicionales y sea ψ una tautología. Sobre L , considera la relación binaria R definida por:

$$(\varphi_1, \varphi_2) \in R \quad \text{si y sólo si} \quad \neg\varphi_1 \models \varphi_2.$$

Verifica que, para toda fórmula proposicional φ ,

$$(\varphi, \varphi \rightarrow \psi) \in R.$$

¿Hace falta usar el principio de inducción estructural?

Solución: Se trata de verificar que, para toda fórmula proposicional φ , la fórmula $(\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$ es una tautología.

Podemos observar que, siendo ψ una tautología, la implicación $\varphi \rightarrow \psi$ también lo es (su conclusión es siempre verdadera). Por tanto, $(\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$ es una tautología ya que su conclusión es siempre verdadera.

Para demostrar la anterior propiedad para toda fórmula proposicional se podría usar el principio de inducción estructural, pero vimos que no hace falta emplearlo.

3) (5 puntos) En la lógica proposicional, formaliza y dibuja el árbol sintáctico del siguiente razonamiento:

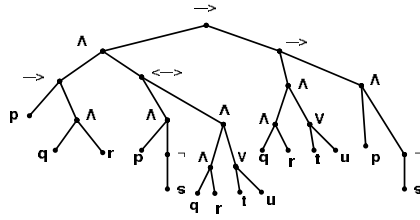


Figura 7.7: Árbol sintáctico del problema 3

$\ln(x)$ es un número real sólo si x es un número real positivo. $\ln(x)$ es un número real no positivo si y sólo si x es un número real positivo menor o igual a 1. Por tanto, si x es un número real positivo menor o igual que 1, $\ln(x)$ es un número real no positivo.

Solución: Para formalizar el razonamiento dado vamos a definir las siguientes proposiciones atómicas:

$p = \ln(x)$ es un número real, $q = x$ es un número real,

$r = x$ es positivo, $s = \ln(x)$ es positivo,

$t = x$ es menor que 1, $u = x$ es igual a 1.

La formalización del razonamiento es:

$$(p \rightarrow q \wedge r) \wedge (p \wedge \neg s \leftrightarrow q \wedge r \wedge (t \vee u)) \rightarrow (q \wedge r \wedge (t \vee u) \rightarrow p \wedge \neg s).$$

La figura 7.7 representa el árbol sintáctico del razonamiento.

4) (4 puntos) Determina si el conjunto de fórmulas $\{p \leftrightarrow q, p \vee q\}$ implica lógicamente la fórmula $p \wedge q$.

Solución: Se trata de verificar si la fórmula $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee q) \rightarrow p \wedge q$ es una tautología.

Bajo una cierta valoración, $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee q)$ es verdadera si y sólo si p y q tienen el mismo valor de verdad y $p \vee q$ es verdadera. Se sigue que $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee q)$ es verdadera si y sólo si p y q son verdaderas. En este caso también la fórmula $p \wedge q$ es verdadera.

Por tanto, todo modelo de $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee q)$ es también un modelo de $p \wedge q$. La fórmula $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee q) \rightarrow p \wedge q$ es una tautología.

Parte II

Lógica de predicados de primer orden

Capítulo 8

Sintaxis de la lógica de primer orden

La **lógica de predicados o de primer orden (LPO, L_1)** es una generalización de la lógica de proposiciones (LP, L_0). Introduciendo nuevos elementos del lenguaje, permite estudiar la estructura interna de los enunciados (sus propiedades, las relaciones entre objetos, etc.).

Ejemplo 8.0.1 *Consideremos el siguiente razonamiento:*

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Todos los hombres son mortales,} \\ \text{Sócrates es un hombre,} \end{array}}{\text{Sócrates es mortal.}}$$

Sean $p =$ todos los hombres son mortales, $q =$ Sócrates es un hombre y $r =$ Sócrates es mortal.

La formalización del razonamiento dado en lógica proposicional es

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ q \end{array}}{r}$$

y tiene el contraejemplo $p : 1, q : 1$ y $r : 0$. Por tanto, el razonamiento en estudio no es válido en lógica proposicional.

Es evidente que la conclusión de este ejemplo no satisface nuestra intuición. Necesitamos extender la lógica proposicional a una lógica que admita la validez de una clase más amplia de razonamientos.

Esta nueva lógica tendría que permitir una descripción más fina de la realidad, pudiendo distinguir los objetos o términos (por ejemplo, los hombres) de sus propiedades o predicados (por ejemplo, la propiedad de ser mortales). La lógica proposicional, cuyos elementos básicos son las proposiciones atómicas, no permite realizar esta distinción.

La lógica de predicados (Gottlob Frege, 1879) nos permite dar una descripción de la realidad más detallada. Por ejemplo, veremos que el razonamiento anterior se puede formalizar más precisamente como

$$\frac{\forall x(H(x) \rightarrow M(x)), \quad H(s),}{M(s)}.$$

Como ya comentamos en varias ocasiones, la sintaxis es la definición axiomática de los elementos básicos del lenguaje y de las reglas que permiten obtener nuevas expresiones correctas a partir de aquellos, las expresiones bien construidas. El objetivo de este capítulo es el estudio de la sintaxis de la lógica de predicados.

En el capítulo 3 estudiamos una breve introducción a las nociones básicas de la teoría de conjuntos, de las relaciones y de las funciones. Estos conceptos son fundamentales para la lógica de predicados y se aconseja su repaso.

Las principales referencias usadas en este capítulo son [A], [HLR] y [MH].

8.1 Alfabeto del lenguaje formal de la lógica de predicados

Los elementos básicos del **alfabeto del la lógica de predicados** son:

- **Los símbolos de constantes:** se denotan $a, b, c, \dots$ y representan objetos concretos. Las constantes son **individuos** o **elementos distinguidos** del **universo del discurso**, que es la colección de objetos sobre los cuales queremos razonar.
- **Las variables:** se denotan $x, y, z, \dots$ y sirven para representar objetos, cuyo dominio hay que especificar.

Tomaremos conjuntos de variables V finitos o infinitos *numerables*. Recordamos que un conjunto V es infinito numerable si existe una función biyectiva entre V y el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

Ejemplo 8.1.1 *En las expresiones “Pedro es un estudiante” y “ x es un número primo,” Pedro es una constante en el conjunto de la personas y x es una variable en el conjunto de los números enteros.*

- **Los conectivos lógicos:**

1. **constantes (de aridad 0):** $\top$ (verdadero) y $\perp$ (falso)

2. conectivos unarios: $\neg$ (negación)

Ejemplo 8.1.2 Siendo " $E(a)$: Pedro es un estudiante," aplicando la negación se obtiene " $\neg(E(a))$: Pedro no es un estudiante." De forma similar, si " $P(x)$: x es un número primo," " $\neg(P(x))$: x no es un número primo.

3. conectivos binarios:

$\wedge$ (y: la conjunción),

$\vee$ (ó: la disyunción),

$\rightarrow$ (la implicación o condicional),

$\leftrightarrow$ (la doble implicación o coimplicación).

NOTACIÓN: El símbolo $\circ$ se usará para representar un conectivo binario cualquiera.

Ejemplos 8.1.3 1) La frase "Sócrates es un filósofo, sin embargo no es un deportista" se escribe como $(F(s) \wedge \neg(D(s)))$, donde " $F(x)$: x es un filósofo," " $D(x)$: x es un deportista" y x es una variable en el conjunto de las personas.

2) La frase "Sócrates es un filósofo o Sócrates es un deportista" se escribe como $(F(s) \vee D(s))$.

3) La frase "La luna es de papel si y sólo si Carlos lee muchos libros" se escribe como $(P(l) \leftrightarrow L(c))$, donde " $P(x)$: x es de papel," " $L(y)$: y lee muchos libros," x es una variable en el conjunto de las cosas y y es una variable en el conjunto de las personas.

• Igualdad:

Usaremos el símbolo de igualdad " $=$ " para expresiones del tipo $4 - 1 = 3$ o $mcm(2, 3) = 6$.

Por tanto, estamos considerando **la lógica de predicados con igualdad**.

Ejemplo 8.1.4 El comando " $IF\ x > 0\ THEN\ y = \sqrt{x}$ " se escribe como $(P(x) \rightarrow (y = f(x)))$, donde " $P(x)$: x es positivo," " $f(x)$: $\sqrt{x}$ " y x y y son variables en el conjunto de los números reales.

• Los cuantificadores:

1. $\forall$: **cuantificador universal** (para todo). El cuantificador universal permite referirse a **todos** los individuos del universo del discurso.

2. $\exists$: **cuantificador existencial** (existe). El cuantificador existencial permite referirse a **algunos** de los individuos del universo del discurso.

Ejemplos 8.1.5 1) La frase “Todo número primo y mayor que 2 es impar” se escribe como $(\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x)))$, donde “ $P(x)$: x es primo,” “ $Q(x)$: x es mayor que 2,” “ $R(x)$: x es impar” y x es un elemento cualquiera del conjunto de los números enteros.

2) La frase “Todo hombre es mortal y hay hombres que no son filósofos” se escribe como $((\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))) \wedge (\exists x(P(x) \wedge (\neg(R(x)))))$, donde “ $P(x)$: x es un hombre,” “ $Q(x)$: x es mortal,” “ $R(x)$: x es filósofo” y x es un elemento cualquiera del conjunto de los seres.

- **Los símbolos de puntuación (o símbolos auxiliares):** paréntesis abiertos y cerrados, comas.
- **Los símbolos de predicado:** se denotan $P, Q, R, \dots$

Todo predicado tiene un número $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de argumentos. El número n es la **aridad** del predicado.

En ocasiones se especificará la aridad n de un predicado P por medio del símbolo P^n .

1. **Predicados constantes**, $n = 0$: representan **proposiciones atómicas**.
Para representar las proposiciones atómicas se suelen usar los símbolos $p, q, r, s, t, \dots$
2. **Predicados monádicos**, $n = 1$: representan **propiedades** de objetos.
3. **Predicados poliádicos**, $n > 1$: representan **relaciones** entre objetos.

Los predicados poliádicos de la lógica de primer orden son relaciones sobre conjuntos según la definición del capítulo 3. Así, por ejemplo, todo predicado binario es una relación binaria R entre dos conjuntos A y B , es decir, $R \subseteq A \times B$.

Un predicado monádico asocia a cada objeto de un dominio una propiedad.

Nota: Por definición, un predicado es tal que al sustituir todas sus símbolos de variables por símbolos de constantes se obtiene una fórmula proposicional.

Ejemplos 8.1.6 1) *Los siguientes son ejemplos de predicados:*

- a) “ p : hoy llueve” es un predicado constante, una proposición atómica.

b) “ $P(x)$: la raíz cuadrada de x es irracional” (predicado monádico), siendo x un cualquier número real.

Al sustituir x por un símbolo de constante, por ejemplo 2, se obtiene la proposición “ $P(2)$: la raíz cuadrada de 2 es irracional.”

c) $P(x, y)$: x es un hermano de y (predicado binario), siendo el dominio el conjunto de las personas.

En particular, “ $P(l, j)$: Luis es un hermano de Jose” es una fórmula proposicional.

d) $P(x, y, z)$: x prefiere y a z (predicado ternario), siendo el dominio de las variable x el conjunto de las personas y el dominio de las variables y y z el conjunto de los países.

En particular, “ $P(l, f, i)$: Luis prefiere Francia a Italia” es una fórmula proposicional.

2) Como vimos en el capítulo 3, los predicados permiten definir conjuntos.

Por ejemplo, en el dominio de los puntos del plano real $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, el conjunto S de las soluciones del sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y &= 1 \\ x - 4y &= 0 \end{cases}$$

se puede definir por medio de los predicados “ $S_1(z)$: el punto $z = (x, y)$ es tal que $3x + 2y = 1$ ” y “ $S_2(z)$: el punto $z = (x, y)$ es tal que $x - 4y = 0$.”

En el siguiente capítulo, dedicado a la semántica de la lógica de primer orden, veremos como asignar valores de verdad a las expresiones bien construidas.

Para nuestro ejemplo, podremos afirmar que los elementos del conjunto S son los puntos del plano z tales que $S_1(z) \wedge S_2(z)$ es verdadera.

- **Los símbolos de función:** se denotan $f, g, h, \dots$

Toda función tiene un número $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de argumentos. El número n es la **aridad** de la función.

En ocasiones se especificará la aridad n de una función f por medio del símbolo f^n .

Nota: Las funciones de la lógica de primer orden son funciones según la definición del capítulo 3.

1. **Funciones constantes**, $n = 0$: son símbolos de constantes.

Para representar las funciones constantes se suelen usar los símbolos $a, b, c, \dots$

2. **Funciones monádicas**, $n = 1$: representan un objeto en función de otro.
3. **Funciones poliádicas**, $n > 1$: representan un objeto en función de n otros objetos.

Ejemplos 8.1.7 1) *Los siguientes son ejemplos de funciones:*

a) $f(x) : \sqrt{x}$ es la función monádica raíz cuadrada de un número real no negativo, $f \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}$.

b) $f(x, y) : x + y$ es la función binaria suma de dos números reales, $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

c) $f(x, g(y, z), a) : x(y + z) - a$ es la función ternaria, $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que multiplica las primeras dos variables reales y resta al producto obtenido la constante real a .

g es la función binaria, $g \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, suma de dos números reales.

2) *El siguiente es un ejemplo de un predicado que no es una función:*

En el conjunto de las personas, “ $P(x, y) = x$ es la madre de y ” es un predicado (una relación binaria) que no es una función, ya que su dominio no es todo el conjunto de las personas y una madre puede tener más que un hijo.

Observación 8.1.8 *De los ejemplos anteriores se deduce que, si n es un número natural, toda función n -aria se puede escribir como un predicado $(n + 1)$ -nario. Sin embargo, en general, un predicado no se puede escribir como una función.*

Veremos que las funciones sirven para simplificar la estructura de la fórmulas de la lógica de primer orden.

8.2 Definición recursiva de las expresiones bien construidas: términos y fórmulas

Como en la lógica proposicional, los elementos básicos de un lenguaje y las reglas de formación permiten definir cadenas finitas de símbolos arbitrarias (**palabras**).

En la lógica proposicional la palabras que son expresiones bien construidas son las fórmulas. En la lógica de predicados las expresiones bien construidas pueden ser de dos tipos: **términos** (que representan objetos) y **fórmulas** (que expresan hechos relativos a objetos).

Los términos y las fórmulas son las **expresiones bien construidas** de la lógica de primer orden (ver figura 8.1).

Los términos y las fórmulas de la lógica de predicados se obtienen a partir del alfabeto dado sólo por medio de las reglas de formación que vamos a definir a continuación.

Como en la lógica proposicional, la definición de las expresiones bien construidas de la lógica de primer orden es recursiva y, como veremos, siguen valiendo los principios de unicidad de estructura, de inducción y de recursión estructural para términos y fórmulas.

• Términos

Definición 8.2.1 (Definición recursiva de los términos)

1. (TAt): Todo símbolo de variable y todo símbolo de constante es un término.

Las variables y las constantes forman el conjunto de los **términos atómicos**.

2. (TF): Si f es un símbolo de función de aridad $n > 0$ y $t_1, t_2, \dots, t_n$ son términos, entonces $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ es un término.

Estos términos se llaman **términos compuestos**.

3. Si una palabra no se obtiene mediante las dos reglas anteriores, entonces no es un término.

Ejemplo 8.2.2 Los siguientes son ejemplos de términos:

$$x, a, f(x), g(x, y), g(x, f(x)),$$

donde x es una variable, a es una constante, f es una función monádica y g es una función binaria.

Los primero dos términos de la lista son atómicos y los restantes son compuestos.

• Fórmulas

Definición 8.2.3 Una **fórmula atómica** es cualquier expresión de la forma $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, donde P es un símbolo de predicado con aridad $n > 0$ y $t_1, t_2, \dots, t_n$ son términos. Las proposiciones atómicas (los predicados constantes), los conectivos lógicos constantes $\top$ y $\perp$ y la igualdad entre términos, $s = t$, también se consideran fórmulas atómicas.

Ejemplo 8.2.4 *Los siguientes son ejemplos de fórmulas atómicas:*

$$\top, p, R(f(x), y)$$

donde p es una proposición atómica, f es una función monádica y R es un predicado binario.

Definición 8.2.5 (Definición recursiva de las fórmulas)

1. (FAt): Toda fórmula atómica es una fórmula.
2. (F $\neg$): Si φ es una fórmula, entonces $\neg\varphi$ es una fórmula.
3. (F $\circ$): Si φ y ψ son dos fórmulas entonces $(\varphi \circ \psi)$ es una fórmula.
4. (F $\forall\exists$): Si φ es una fórmula y x es un símbolo de variable, entonces $\exists x\varphi$ y $\forall x\varphi$ son fórmulas.
5. Si una palabra no se obtiene mediante las cuatro reglas anteriores, entonces no es una fórmula.

NOTACIÓN: Para representar las fórmulas se suelen usar las letras del alfabeto griego $\varphi, \psi, \chi, \dots$

Ejemplos 8.2.6 1) Las fórmulas atómicas del ejemplo anterior son fórmulas.

2) La expresión

$$(\forall x \exists y (R(x, f(y)) \wedge (\neg(f(x) = s))))$$

es una fórmula ya que:

1. $R(x, f(y))$ y $(f(x) = s)$ son fórmulas atómicas (aplicando (FAt)),
2. $(\neg(f(x) = s))$ es una fórmula (aplicando (F $\neg$)),
3. $(R(x, f(y)) \wedge (\neg(f(x) = s)))$ es una fórmula (aplicando (F $\circ$)),
4. $\exists y(R(x, f(y)) \wedge (\neg(f(x) = s)))$ es una fórmula (aplicando (F $\forall\exists$)),
5. $(\forall x \exists y (R(x, f(y)) \wedge (\neg(f(x) = s))))$ es una fórmula (aplicando (F $\forall\exists$)).

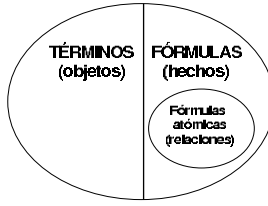


Figura 8.1: Expresiones bien construidas

8.2.1 Variables libres y variables ligadas

Las fórmulas se clasifican en **fórmulas abiertas** y **fórmulas cerradas**, dependiendo de ciertas características de sus variables.

Definición 8.2.7 Fórmulas abiertas y fórmulas cerradas

- Se dice que la ocurrencia de una variable x en una fórmula φ es **ligada** (o que la variable es ligada) si está afectada por algún cuantificador. En caso de que una variable no aparezca ligada diremos que su ocurrencia es **libre** (la variable es libre).
- Se dice que una fórmula φ es **abierta** si tiene alguna ocurrencia de variable libre. Se dice que una fórmula φ es **cerrada** (o que es una sentencia) si no tiene ninguna ocurrencia de variable libre.

Ejemplos 8.2.8 1) En la fórmula $\forall xP(x, y)$ la variable x aparece ligada y la variable y aparece libre. La fórmula es abierta.

2) En la fórmula

$$\exists x((P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge Q(x)))$$

la variable x aparece ligada en las dos componentes de la disyunción, ya que el cuantificador existencial la afecta en los dos casos. La fórmula es cerrada.

3) En la fórmula

$$(\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge Q(x)))$$

la variable x aparece ligada en la primera componente de la disyunción y aparece libre en la segunda. En este caso el cuantificador existencial afecta x sólo en la primera componente de la disyunción y la fórmula es abierta.

Notar que esta última fórmula se puede reescribir como

$$(\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(y) \wedge Q(y))).$$

8.2.2 El principio de inducción estructural para expresiones bien construidas

Como en el caso de la lógica de proposiciones, para poder estudiar las propiedades de las expresiones bien construidas de la lógica de primer orden una de las técnicas más adecuadas es el principio de inducción estructural.

Principio de inducción estructural para términos

Sea $\mathbb{P}$ una cierta propiedad tal que:

1. **Base de inducción (TAt):** Todos los términos atómicos cumplen la propiedad $\mathbb{P}$.

Pasos de inducción:

2. (TF): Si f es un símbolo de función de aridad $n > 0$ y los términos $t_1, t_2, \dots, t_n$ cumplen la propiedad $\mathbb{P}$ (hipótesis de inducción), entonces $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ cumple la propiedad $\mathbb{P}$.

El **principio de inducción estructural para términos** afirma que si se verifican las condiciones anteriores, entonces se puede concluir que **todo término** cumple la propiedad $\mathbb{P}$.

El principio de inducción estructural para fórmulas

Sea $\mathbb{P}$ una cierta propiedad tal que:

1. **Base de inducción (FAt):** Todas las fórmulas atómicas cumplen la propiedad $\mathbb{P}$.

Pasos de inducción:

2. (F $\neg$): Si φ es una fórmula que cumple la propiedad $\mathbb{P}$ (hipótesis de inducción), entonces $\neg(\varphi)$ cumple la propiedad $\mathbb{P}$,
3. (F $\circ$): Si φ y ψ son dos fórmulas que cumplen la propiedad $\mathbb{P}$ (hipótesis de inducción), entonces $(\varphi \circ \psi)$ cumple la propiedad $\mathbb{P}$,
4. (F $\forall\exists$): Sean φ es una fórmula y x un símbolo de variable. Si φ cumple la propiedad $\mathbb{P}$ (hipótesis de inducción), entonces $\forall x\varphi$ y $\exists x\varphi$ cumplen la propiedad $\mathbb{P}$.

El **principio de inducción estructural para fórmulas** afirma que si se verifican las condiciones anteriores, entonces se puede concluir que **toda fórmula** cumple la propiedad $\mathbb{P}$.

8.3 Representación de las expresiones bien construidas

Como ya hicimos en el caso de la lógica proposicional, vamos a ilustrar las maneras más usadas para representar las fórmulas de la lógica de primer orden.

8.3.1 Fórmulas en forma abreviada

Para reducir una fórmula a su **forma abreviada** podemos seguir los siguientes pasos:

- a) Se puede **omitir el par de paréntesis externo**.

Así, por ejemplo, la fórmula

$$((\exists xP(x) \wedge Q(x)) \wedge (\forall yP(y)))$$

se puede escribir como:

$$(\exists xP(x) \wedge Q(x)) \wedge (\forall yP(y)).$$

- b) Se introducen las mismas **reglas de precedencia** y el mismo **convenio de asociatividad** entre conectivos que definimos para fórmulas proposicionales.

Así, por ejemplo, la fórmula anterior se escribiría (sin cambios) como:

$$(\exists xP(x) \wedge Q(x)) \wedge (\forall yP(y)).$$

- c) Se admite la **precedencia de los cuantificadores**: los cuantificadores tienen prioridad sobre los conectivos. Se obtienen los siguientes niveles de precedencia:

Nivel 1: $\forall$ y $\exists$,
Nivel 2: $\neg$,
Nivel 3: $\vee$ y $\wedge$,
Nivel 4: $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$.

Finalmente, la forma abreviada de nuestra fórmula es:

$$(\exists xP(x) \wedge Q(x)) \wedge \forall yP(y).$$

8.3.2 Principio de unicidad de estructura para expresiones bien construidas

Como para la lógica proposicional, en la lógica de primer orden valen principios de unicidad de estructura para términos y fórmulas. Cada expresión bien construida admite un análisis sintáctico único, es decir, existe una única manera de derivarla usando las reglas de formación dadas.

Estos principios nos permitirán representar expresiones bien construidas por medio de árboles sintácticos (o estructurales).

Principio de unicidad de estructura para términos

Todo término pertenece a una y sólo una de las siguientes categorías:

1. (TAt): es atómico,
2. (TF): se escribe como $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, donde f es un símbolo de función de aridad $n > 0$ y $t_1, t_2, \dots, t_n$ son términos.
 f y $t_1, t_2, \dots, t_n$ están unívocamente determinados.

Principio de unicidad de estructura para fórmulas

Toda fórmula φ pertenece a una y sólo una de las siguientes categorías:

1. (FAt)₁ : φ es una proposición atómica o uno de los conectivos lógicos constantes $\top$ y $\perp$,
2. (FAt)₂ : φ es una igualdad entre términos, $s = t$, donde s y t están unívocamente determinados,
3. (FAt)₃ : φ es $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, donde P es un símbolo de predicado con aridad $n > 0$ y $t_1, t_2, \dots, t_n$ son términos.
 P y $t_1, t_2, \dots, t_n$ están unívocamente determinados,
4. ($F\neg$): φ es $\neg(\varphi_1)$ para cierta fórmula φ_1 , unívocamente determinada,
5. ($F\circ$): φ es $(\varphi_1 \circ \varphi_2)$ para cierto conectivo $\circ$ y ciertas fórmulas φ_1 y φ_2 .
 φ_1 y φ_2 están unívocamente determinadas,
6. ($F\forall\exists$): φ es $\forall x\varphi_1$ o $\exists x\varphi_1$ para cierta fórmula φ_1 y cierto símbolo de variable x .
 φ_1 y x están unívocamente determinados.

8.3.3 Términos y fórmulas en forma de árbol estructural

Una primera consecuencia de los principios de unicidad de estructura es la posibilidad de representar términos y fórmulas por medio de árboles.

En los siguientes dos ejemplos veremos como construir el árbol sintáctico de un término y de una fórmula.

Ejemplos 8.3.1 1) *Consideremos el término compuesto*

$$f(g(x, h(a, y)), i(x, l(y))).$$

Para representar su estructura sintáctica podemos dibujar el árbol con raíz de la figura 8.2.

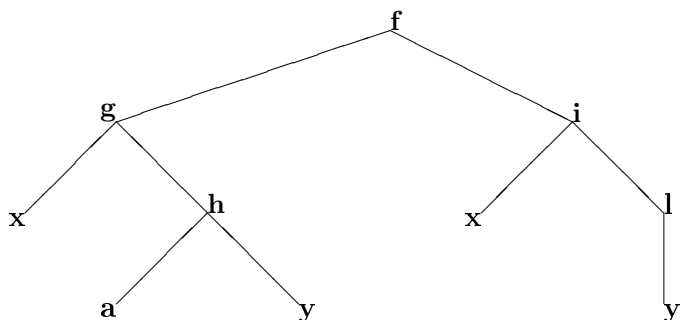


Figura 8.2: Árbol sintáctico del término $f(g(x, h(a, y)), i(x, l(y)))$.

2) *Sea ahora φ la fórmula*

$$\varphi : \forall x \exists y (\forall z (a = f(z)) \vee (\neg R(g(x, h(a, y)), i(x, l(y)))).$$

Para representar la estructura sintáctica de φ , podemos dibujar el árbol con raíz de la figura 8.3.

Notar que las etiquetas de las hojas de los árboles sintácticos son los términos atómicos de las expresiones bien construidas representadas. La existencia de predicados y funciones que dependen de n variables, hace que en la lógica de predicados los árboles estructurales no tienen que ser binarios como es en el caso de la lógica proposicional.

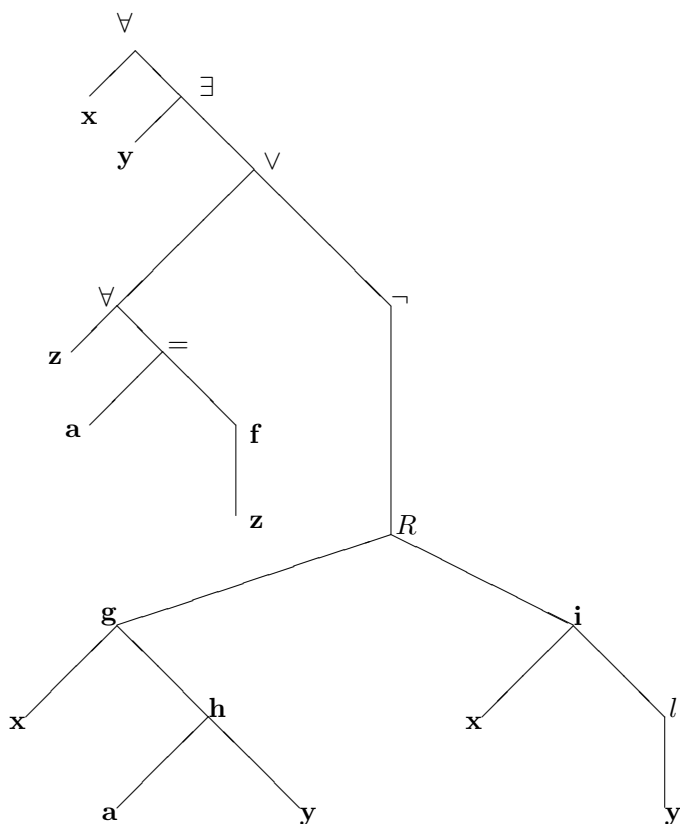


Figura 8.3: Árbol sintáctico de φ .

8.3.4 El principio de recursión estructural para expresiones bien construidas

Como ya vimos para la lógica proposicional, también en el caso de la lógica de predicados una segunda consecuencia de los principios de unicidad de estructura son los principios de recursión estructural para expresiones bien construidas. Estos principio permiten definir funciones sobre el conjunto de los términos y el conjuntos de las fórmulas.

El principio de recursión estructural para términos

Sea A un conjunto no vacío. Para definir una función

$$f : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{A}$$

cuyo dominio sea el conjunto de los términos y cuyo codominio sea un conjunto dado $\mathbf{A}$, se puede emplear la siguiente definición recursiva:

1. **Base (TAt):** Si t es un término atómico, $f(t)$ se define explícitamente, es un elemento de $\mathbf{A}$,
2. **Paso recursivo (TF):** si t es el término compuesto $g(t_1, t_2, \dots, t_n)$, se define $f(t)$ en función de $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_n)$.

Estas definiciones determinan la función f sobre todo $\mathbf{T}$.

Ejemplos 8.3.2 (HLR) 1) Sea $\mathbf{Var}$ el conjunto de todas las variables. Queremos definir recursivamente el conjunto $Var(t)$ de las variables libres de un cualquier término t .

Por el principio de recursión estructural para términos, podemos definir una función $Var : \mathbf{T} \longrightarrow P(\mathbf{Var})$, ($P(\mathbf{Var})$ es el conjunto de las partes de $\mathbf{Var}$) que asocia a todo término t el conjunto de sus variables libres, $Var(t)$:

1. **Base (TAt):** $Var(x) = \{x\}$, y $Var(a) = \emptyset$, donde $\emptyset$ es el conjunto vacío.
2. **Paso recursivo (TF):** si t es el término compuesto $g(t_1, t_2, \dots, t_n)$, se define

$$Var(t) = Var(t_1) \cup Var(t_2) \cup \dots \cup Var(t_n).$$

2) Se denomina **profundidad** de un término t a la longitud de la rama más larga del árbol estructural de t . Por tanto, la profundidad de t es la altura de su árbol sintáctico.

Por ejemplo, la longitud del término $f(g(x, h(a, y)), i(x, l(y)))$ de la figura 8.2 es 3.

Por el principio de recursión estructural, la definición recursiva de la función profundidad

$$pf : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

(que asocia a cada término $t \in \mathbf{T}$ su profundidad) es:

1. **Base (TAt):** Si t es un término atómico, $pf(t) = 0$,
2. **Paso recursivo (TF):** si t es el término compuesto $g(t_1, t_2, \dots, t_n)$, se define

$$pf(t) = \max\{pf(t_1), pf(t_2), \dots, pf(t_n)\} + 1.$$

El principio de recursión estructural para fórmulas

Sea A un conjunto no vacío. Para definir una función

$$f : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{A}$$

cuyo dominio sea el conjunto de las fórmulas y cuyo codominio sea un conjunto dado $\mathbf{A}$, se puede emplear la siguiente definición recursiva:

1. **Base (FAt):** Si φ es una fórmula atómica, $f(\varphi)$ se define explícitamente, es un elemento de $\mathbf{A}$.

Paso recursivo:

2. $(F\neg)$: $f(\neg(\varphi_1))$ se define en función de $f(\varphi_1)$,
3. $(F\circ)$: $f(\varphi_1 \circ \varphi_2)$ se define en función de $f(\varphi_1)$ y $f(\varphi_2)$,
4. $(F\forall\exists)$: $f(\forall x\varphi_1)$ y $f(\exists x\varphi_1)$ se definen en función de $f(\varphi_1)$.

Estas definiciones determinan la función f sobre todo $\mathbf{F}$.

Ejemplo 8.3.3 [HLR]

Sea $\mathbf{Var}$ el conjunto de todas las variables. Queremos definir recursivamente el conjunto $Lib(\varphi)$ de las variables libres de una cualquier fórmula φ .

Por el principio de recursión estructural para fórmulas, podemos definir una función $Lib : \mathbf{F} \longrightarrow P(\mathbf{Var})$, que asocia a toda fórmula φ el conjunto de sus variables libres, $Lib(\varphi)$:

1. **Base (FAt):** Si φ es una fórmula atómica, $Lib(\varphi)$ es el conjunto $Var(\varphi)$ de todas las variables de φ . En particular,
 $Lib(\top) = Lib(\perp) = Lib(p) = \emptyset$, donde $\emptyset$ es el conjunto vacío,
 $Lib(s = t) = Var(s) \cup Var(t)$,
 $Lib(P(t_1, t_2, \dots, t_n)) = Var(t_1) \cup Var(t_2) \cup \dots \cup Var(t_n)$.

Paso recursivo:

2. $(F\neg)$: $Lib(\neg(\varphi_1)) = Lib(\varphi_1)$,
3. $(F\circ)$: $Lib(\varphi_1 \circ \varphi_2) = Lib(\varphi_1) \cup Lib(\varphi_2)$,
4. $(F\forall\exists)$: $Lib(\forall x\varphi_1) = Lib(\exists x\varphi_1) = Lib(\varphi_1) \setminus \{x\}$.

Estas definiciones determinan la función Lib sobre todo $\mathbf{F}$.

8.4 Formalización del lenguaje natural

Como ya vimos en lógica proposicional, formalizar una frase del lenguaje natural consiste en encontrar una expresión que la represente fielmente en el lenguaje formal.

No hay procedimientos generales para la formalización, pero se pueden determinar algunas estrategias, como las que vamos a indicar a continuación.

La referencia principal para esta sección es [A].

- Si la frase que se quiere formalizar no tiene una estructura sintáctica fácilmente reconocible, se puede intentar **reescribirla** en el lenguaje natural hasta llegar a una frase con una estructura más sencilla y que mantenga el mismo significado.
- Tenemos que **definir claramente el dominio o los dominios** a los cuáles pertenecen los objetos que vamos a usar.
- En una frase necesitamos determinar:
 - Las **constantes**, que son objetos concretos de uno o más dominios.
 - Las **variables**, que son objetos genéricos de uno o más dominios.
 - Las **funciones de aridad** $n > 0$, que representan como un cierto objeto queda determinado por otros (u otro).
 - Los **predicados monádicos** que representan propiedades de un objeto.
 - Los **predicados de aridad** $n > 0$ que representan relaciones entre objetos.
- Identificadas las conectivas lingüísticas y los cuantificadores (universales o existenciales), necesitamos sustituirlas por los **conectivos** y los **cuantificadores** de la lógica de primer orden.
- Para formalizar un **razonamiento**, necesitamos formalizar el conjunto de sus premisas y de su conclusión.

Observación 8.4.1 *A la hora de formalizar frases o razonamientos hay algunas observaciones importantes que es oportuno tener en cuenta.*

1. *Ya que la formalización de una frase depende del dominio o de los dominios elegidos, se pueden obtener formalizaciones distintas de un mismo enunciado.*

Ejemplo 8.4.2 *Para formalizar la frase:*

“Todos los niños juegan con la pelota,”

podemos definir los predicados

$$J(x) : x \text{ juega con la pelota}$$

y

$$J(x, y) : x \text{ juega con } y.$$

a) Sea D_1 el conjunto de los niños. Entonces se obtiene

$$\forall x J(x).$$

b) Sean D_2 el conjunto de las personas y sea “ $N(x) : x$ es un niño.” En este caso se obtiene

$$\forall x (N(x) \rightarrow J(x)).$$

c) Sean D_1 el conjunto de los niños y D_2 el conjunto de los juegos. Entonces “ $p = \text{la pelota}$ ” es una constante en D_2 y obtenemos la formalización

$$\forall x J(x, p).$$

d) Sean D_1 el conjunto de las personas y D_2 el conjunto de los juegos. Entonces “ $p = \text{la pelota}$ ” es una constante en D_2 y, usando el predicado “ $N(x) : x$ es un niño,” obtenemos la formalización

$$\forall x (N(x) \rightarrow J(x, p)).$$

2. *Toda función se puede representar mediante un predicado con un argumento más que la función. Además, las funciones simplifican la estructura de la fórmula obtenida.*

Ejemplo 8.4.3 *Consideremos la frase:*

“Todo padre quiere mucho a sus hijos.”

a) Formalización con predicados.

Podemos definir el dominio D de las personas y los predicados

$$P(x, y) : x \text{ es el padre de } y,$$

y

$$Q(x, y) : x \text{ quiere mucho a } y.$$

Con estas definiciones, la formalización sería

$$\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow Q(x, y)).$$

b) Formalización con funciones.

Podemos definir el dominio D de las personas, la función

$$f(x) : \text{el padre de } x,$$

y

$$Q(x, y) : x \text{ quiere mucho a } y.$$

Con estas definiciones, la nueva formalización sería

$$\forall x(Q(f(x), x)).$$

Notar que la formalización se ha simplificado y que la función de un argumento $f(x)$ sustituye al predicado binario $P(x, y)$.

Observar también que “el hijo de x ” no es una función, ya que un mismo padre puede tener más que un hijo y, por tanto, el término asociado a x (al padre) no quedaría unívocamente determinado.

Patrones más habituales en la formalización de los cuantificadores:

1. Universal afirmativo

$$\forall x(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2),$$

$$\forall x(\neg\varphi_2 \rightarrow \neg\varphi_1).$$

Es la forma de representar frases del tipo:

Todo φ_1 es φ_2 ,

Sólo los φ_2 son φ_1 ,

Nadie es φ_1 a menos que sea φ_2 ,

No hay ningún φ_1 que no sea φ_2 ,

φ_1 es suficiente para φ_2 ,

φ_2 es necesario para φ_1 .

2. Universal negativo

$$\forall x(\varphi_1 \rightarrow \neg\varphi_2).$$

Es la forma de representar frases del tipo:

Ningún φ_1 es φ_2 ,

Todos los φ_1 carecen de φ_2 .

3. Existencial afirmativo

$$\exists x(\varphi_1 \wedge \varphi_2).$$

Es la forma de representar frases del tipo:

Algún φ_1 es φ_2 ,

Alguien es a la vez φ_1 y φ_2 .

4. Existencial negativo

$$\exists x(\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2).$$

Es la forma de representar frases del tipo:

Algún φ_1 no es φ_2 ,

No todos los φ_1 son φ_2 .

Ejemplos 8.4.4 1) (Universal afirmativo)

“Nadie se levanta a menos que tenga que irse.”

La frase anterior se puede reescribir como

“Para todo x , si x no tiene que irse, entonces no se levanta,”

o como

“Para todo x , si x se levanta, entonces tiene que irse.”

Sea D el dominio de las personas y sean

$P(x) : x$ se levanta,

$Q(x) : x$ tiene que irse.

Con estas definiciones obtenemos la formalización:

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)).$$

2) (Universal negativo)

“Ningún emperador es odontólogo (L. Carroll).”

Sea D el dominio de las personas y sean

$P(x) : x$ es emperador,

$Q(x) : x$ es odontólogo.

Con estas definiciones obtenemos la formalización:

$$\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x)).$$

3) (Existencial afirmativo)

“Algunos estudiantes de informática sólo son amigos de los aficionados a la lógica [C].”

Esta frase se puede reescribir como:

“Para algunos estudiantes de informática, una persona es un amigo sólo si es aficionado a la lógica [C].”

Sea D el dominio de las personas y sean

$P(x) : x$ es estudiante de informática,

$Q(x) : x$ es aficionado a la lógica,

$R(x, y) : x$ es amigo de y .

Con estas definiciones obtenemos la formalización:

$$\exists x (P(x) \wedge \forall y (R(x, y) \rightarrow Q(y))).$$

4) (Existencial negativo)

“Algunos gatos no saben silbar ni maullar (L. Carroll).”

Sea D el dominio de los animales y sean

$P(x) : x$ es un gato,

$Q(x) : x$ sabe silbar,

$R(x) : x$ sabe maullar.

Con estas definiciones obtenemos la formalización:

$$\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x) \wedge \neg R(x)).$$

Negación de frases que contienen cuantificadores

Vamos a ver como se escribe **la negación** de una frase que contiene un cuantificador.

Universal-Existencial

Consideremos la frase

“Todos los alumnos de esta clase aprobarán en febrero.”

Sean D el conjunto de los alumnos de esta clase y

$$P(x) : x \text{ aprobará en febrero.}$$

La frase dada se puede escribir como:

$$\forall x P(x).$$

La negación de “Todos los alumnos de esta clase aprobarán en febrero” es “No todos los alumnos de esta clase aprobarán en febrero,” es decir,

$$\neg(\forall x P(x)),$$

que podemos reescribir como:

“Existen alumnos de esta clase que no aprobarán en febrero.”

Con los mismos dominio y predicados anteriores, su formalización es

$$\exists x(\neg P(x)).$$

Existencial-Universal

Consideremos ahora la frase

“Algunos alumnos de esta clase suspenderán en febrero.”

Sean D el conjunto de los alumnos de esta clase y

$$P(x) : x \text{ suspenderá en febrero.}$$

La frase dada se puede escribir como:

$$\exists x P(x).$$

La negación de “Algunos alumnos de esta clase suspenderán en febrero” es “Ningún alumno de esta clase suspenderá en febrero,” es decir,

$$\neg(\exists x P(x)),$$

que podemos reescribir como:

“Todos los alumnos de esta clase no suspenderán en febrero.”

Con los mismos dominio y predicados anteriores, su formalización es

$$\forall x(\neg P(x)).$$

Ejemplo 8.4.5 (*Definición de límite de una sucesión*) Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos y $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, es decir, una función

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Si $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $n, m \in \mathbb{N}$, se dice que el número real L es el límite de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, si

$$\forall \varepsilon \exists n \forall m ((m \geq n) \rightarrow |a_m - L| < \varepsilon).$$

La formalización matemática de la condición $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq L$ es

$$\exists \varepsilon \forall n \exists m ((m \geq n) \wedge |a_m - L| \geq \varepsilon).$$

Ejemplo 8.4.6 *Vamos a formalizar el siguiente razonamiento [C]:*

Sólo las buenas personas ayudan a los pobres. Ninguna buena persona es aficionada a la fotografía. Antonio ayuda a Juan. Antonio es aficionado a la fotografía. Entonces, Juan es pobre.

Sea D el dominio de las personas, a la constante Antonio y j la constante Juan. Definamos los siguientes predicados:

$$P(x) : x \text{ es buena persona},$$

$$Q(x, y) : x \text{ ayuda a } y,$$

$$R(x) : x \text{ es pobre},$$

$$S(x) : x \text{ es aficionado a la fotografía}.$$

Con estas definiciones el razonamiento dado se puede escribir como:

$$\forall x \forall y (Q(x, y) \wedge R(y) \rightarrow P(x)),$$

$$\forall x (P(x) \rightarrow \neg S(x)),$$

$$Q(a, j),$$

$$S(a)$$

$$R(j)$$

Observación 8.4.7 (Lógicas de predicados de orden superior)

El cálculo de predicados de primer orden admite generalizaciones a cálculos de predicados de orden mayor que uno. En el cálculo de predicados de primer orden los cuantificadores pueden afectar sólo a las variables y los predicados se calculan sólo sobre términos.

En el cálculo de predicados de segundo orden, los cuantificadores afectan también a predicados.

En el cálculo de tercer orden se definen predicados de predicados (no sólo predicados de términos).

Siguiendo añadiendo niveles de “predicados de predicados,” se sube el nivel del cálculo de predicados que se está definiendo.

8.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 8.5.1 *Determina cuáles de las siguientes fórmulas (en forma abreviada) son abiertas y cuáles son cerradas. En cada caso, identifica las variables libres y ligadas.*

1. $\forall x(Q(x, y) \rightarrow P(g(x), a, b)),$
2. $\exists y(\forall x Q(x, y) \rightarrow P(g(x), a, b)),$
3. $\exists y \forall x Q(x, y) \wedge P(g(x), a, b),$
4. $\exists y \exists x Q(x, y) \wedge \neg \forall x P(g(x), a, b).$

Ejercicio 8.5.2 *Representa en forma de árbol estructural las fórmulas del ejercicio anterior y los siguientes términos:*

1. $f(g(a, x), h(x, i(y, b)), c),$
2. $f(g(x), h(x, y), i(y, b), l(x, c)).$

Ejercicio 8.5.3 [HLR] *Usando el principio de recursión estructural, define la función*

$$Lig : \mathbf{F} \longrightarrow P(\mathbf{Var}),$$

que a cada fórmula φ asocia el conjunto $Lig(\varphi)$ de sus variables ligadas.

Ejercicio 8.5.4 *Define, utilizando recursión estructural, la función*

$$f : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

que asigna a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden el número de veces que aparece el conectivo binario “ $\wedge$ ” en esa fórmula.

4) (4 puntos) *Formaliza las siguientes oraciones con el lenguaje de la lógica de primer orden. Indica cuál es el dominio elegido y los símbolos de constante, proposición atómica, función y predicado que utilizas.*

a) *Todos los unicornios, salvo Toby, son azules. No hay centauros verdes. Los pegazos sólo ayudan a los unicornios.*

b) *En el conjunto de los números enteros se cumple que cualquier número que sea múltiplo de 6 se puede escribir como el producto de un múltiplo de 2 por un múltiplo de 3.*

Ejercicio 8.5.5 *Formaliza las siguientes frases en lógica de primer orden. Para cada una de ellas, escribe su negación y vuelve a traducirla al lenguaje natural.*

1. *Sólo los científicos que trabajan en áreas aplicadas son famosos.*
2. *Algunos caballos son salvajes.*
3. *Todas las personas tienen algún amigo.*

4. *En los números reales, el producto de cualquier número real no negativo por cualquier número negativo es no negativo. El producto de cualquier número no negativo por cualquier número no negativo es no negativo.*
5. *En los números naturales, el siguiente de cualquier número par no es par. El siguiente de cualquier número no par es par. El producto de cualquier número par por cualquier natural es par.*
6. *Si el producto de dos números naturales es múltiplo de un primo, entonces uno de ellos es múltiplo del primo.*
7. *Sólo las buenas enfermeras atienden con paciencia a los enfermos tísicos.*
8. *Los aficionados del Madrid son amigos de los aficionados del Betis. Algunos aficionados del Madrid son amigos de los aficionados del Betis. Algunos aficionados del Madrid sólo son amigos de aficionados del Betis.*
9. *Dos hermanos nunca tienen la misma opinión respecto a todos los aspectos de la vida.*

Ejercicio 8.5.6 *Formaliza el siguiente argumento en la lógica de primer orden:*

Dos personas son hermanas si tienen el mismo padre. Dos personas son primas si tienen el mismo abuelo. El padre de Juan es hijo único. Por tanto: sus primos son sus hermanos.

Capítulo 9

Semántica de la lógica de primer orden. Teoría interpretativa

Como ya hicimos en el capítulo 5 para la lógica proposicional, en este capítulo vamos a estudiar la semántica y sus sistemas de demostración en la lógica de primer orden. Volvemos a recordar sus definiciones:

La **semántica** es la definición de un conjunto de significados (generalmente verdadero o falso) que se puedan asociar a una expresión bien construida. Permite definir la validez de una expresión o de un razonamiento.

Los **sistemas de demostración** son sistemas formales que permiten averiguar cuándo una expresión o un razonamiento son válidos. En el contexto de la semántica se denominan **teoría interpretativa**.

Volveremos a estudiar los conceptos fundamentales de validez de una fórmula, de consecuencia lógica y de equivalencia entre fórmulas en el contexto más complejo y detallado de la lógica de primer orden.

A pesar de las muchas analogías entre la semántica de la lógica proposicional y la de la lógica de primer orden, veremos que hay varias diferencias entre ellas. La principal es que en la lógica de primer orden no hay un algoritmo de decisión de validez de fórmulas (como veremos, se pierde la propiedad de decidibilidad). Los métodos de las tablas de verdad y de los tableaux de la lógica proposicional no se pueden extender a la lógica de primer orden.

9.1 Interpretaciones en lógica de primer orden

Para asignar un significado a una expresión bien construida de la lógica de primer orden necesitamos unos métodos más complejos que aquellos estudiados en la lógica proposicional. Este hecho es debido a la mayor precisión y variedad de los elementos básicos del lenguaje de la lógica de primer orden y, por tanto, a la necesidad de explicar cómo interpretar cada uno de ellos respetando su naturaleza sintáctica.

Lo primero que se necesita es establecer un universo del discurso, un **dominio**, para definir qué tipo de objetos estamos analizando.

A continuación, tendremos que definir cómo asignar un significado, en el dominio elegido, a los elementos básicos del lenguaje.

Finalmente, los significados de los elementos básicos nos proporcionarán, con un procedimiento de recursión estructural, los significados de los términos y de las fórmulas.

Necesitamos entonces empezar con asignar significados a constantes, funciones, predicados (algo que llamaremos una **interpretación**) y a variables (una **asignación**).

Estos conceptos se corresponden al concepto de valoración visto en la lógica proposicional.

En la lógica de primer orden una **signatura** Σ es un conjunto de símbolos de funciones y de predicados con aridades asociadas.

Una signatura puede ser finita o infinita numerable. Supondremos que sea decidable, es decir, que sea posible reconocer efectivamente sus símbolos con sus aridades.

El lenguaje L_Σ es el conjunto de todas las fórmulas que se pueden construir a partir de los elementos de Σ .

Cuando no haga falta especificar la signatura que se está usando, indicaremos un lenguaje simplemente con el símbolo L .

Definición 9.1.1 Sea L un lenguaje de la lógica de primer orden. Una **interpretación** es cualquier par $\mathbb{I} = (D, I)$ donde:

- D es un conjunto no vacío, denominado **dominio** de la interpretación,
- I es una función que asocia:
 1. a cada símbolo de **constante** c del lenguaje un elemento c^I del conjunto D ,
 2. a cada símbolo de **función** f del lenguaje con aridad $n > 0$ una función $f^I : D^n \longrightarrow D$,
 3. a cada símbolo de **proposición atómica** p un elemento p^I del conjunto $\{0, 1\}$ (una valoración),
 4. a cada símbolo de **predicado** P del lenguaje con aridad $n > 0$ una relación $P^I \subseteq D^n$.

Definición 9.1.2 Dada una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ para un lenguaje de primer orden, se llama **asignación** a una función A que asocia a cada símbolo de variable x un elemento x^A perteneciente al conjunto D .

Observación 9.1.3 *En la literatura la terminología empleada no es uniforme: en varios textos se denomina interpretación al par formado por una **estructura** (interpretación en nuestra notación) y un **estado** (asignación en nuestra notación).*

En estos apuntes la definición de interpretación es la 9.1.1 y, por tanto, no incluye ninguna asignación. En cada caso, se tendrá que especificar la asignación elegida para una dada interpretación.

La justificación de la notación elegida es que, como veremos, nuestras definiciones permiten definir más claramente los conceptos de fórmula satisfacible bajo una interpretación y de modelo de una fórmula (ver definición 9.3.1).

Ejemplo 9.1.4 $[F]$

Sea $\Sigma = \{a, f, g\}$ una signatura, donde a es una constante, f es una función unaria y g una función binaria.

Vamos a ver tres posibles interpretaciones y asignaciones:

1) Definimos el dominio

$$D_1 = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

la interpretación

$$I : \quad a^I = 0, \quad f^I = \text{suc}(\text{el siguiente}), \quad g^I = + (\text{la suma}),$$

y la asignación

$$A : x^A = 1.$$

2) Definimos el dominio D_2 como el conjunto de todas las posibles palabras que se pueden construir con el alfabeto $\{, @\}$, la interpretación*

$$I : \quad a^I = *, \quad f^I = \text{añade } * \text{ al final de la palabra}, \\ g^I = + (\text{la concatenación}),$$

y la asignación

$$x^A = * @ * .$$

3) Definimos el dominio

$$D_3 = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{Z},$$

la interpretación

$$I : \quad a^I = 1, \quad f^I = \text{ant}(\text{el anterior}), \quad g^I = - (\text{la resta}),$$

y la asignación

$$A : x^A = 1.$$

Observación 9.1.5 Hay una clara analogía entre el concepto de asignación de la definición 9.1.2 y de asignación de un estado a las variables de un programa en un lenguaje de programación.

Si en un programa ejecutamos el comando “ $x := a$,” el estado de la variable x se ha modificado y ahora su valor es el elemento a del conjunto del tipo de datos que se está considerando.

En nuestra notación, siendo D el dominio de una interpretación y A una asignación para esa interpretación, el nuevo estado de la variable x es $x^A = a \in D$.

NOTACIÓN: Si A es una asignación, escribiremos $A[x/d]$ para indicar una nueva asignación que difiere de A sólo en la variable x , a la cual ya se ha asignado el valor $d \in D$.

9.2 Interpretación semántica de términos y fórmulas

El siguiente paso hacia la definición de significados para expresiones bien construidas consiste en el usar el principio de recursión estructural para poder extender una interpretación y una asignación dadas a todos los términos y a todas las fórmulas. Esta extensión nos permitirá asociar valores de verdad $\{0, 1\}$ a las fórmulas y estudiar su validez.

Definición 9.2.1 (Definición por recursión estructural de interpretación de términos)

Dada una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ para un lenguaje de primer orden, y dada una asignación A para esa interpretación, se asocia a cada término del lenguaje t un elemento $t^{I,A}$ perteneciente a D de la siguiente forma:

1. Base (TAt):

- si t es una constante c , entonces

$$t^{I,A} = c^I,$$

- si t es una variable x , entonces

$$t^{I,A} = x^A,$$

2. Paso recursivo (TF): si t es un término de la forma $f(t_1, \dots, t_n)$, entonces

$$t^{I,A} = f^I(t_1^{I,A}, \dots, t_n^{I,A}).$$

Ejemplo 9.2.2 Usando las definiciones del ejemplo anterior 9.1.4, los términos

$$t_1 = f(g(f(a), f(x)))$$

y

$$t_2 = \{f(g(x, f(g(x, f(a)))))\}$$

se interpretan como se describe a continuación:

1)

$$t_1^{I,A} = \text{suc}(\text{suc}(0) + \text{suc}(1)) = 4,$$

$$t_2^{I,A} = \text{suc}(1 + \text{suc}(1 + \text{suc}(0))) = 5.$$

2)

$$t_1^{I,A} = f^I(f^I(*) + f^I(*@*)) = f^I(** + * @ **) = ***@***.$$

$$\begin{aligned} t_2^{I,A} &= f^I(*@* + f^I(*@* + f^I(*))) = \\ &= f^I(*@* + * @ ***) = * @ ** @ ** ** * . \end{aligned}$$

3)

$$t_1^{I,A} = \text{ant}(\text{ant}(1) - \text{ant}(1)) = -1,$$

$$t_2^{I,A} = \text{ant}(x^A - \text{ant}(x^A - \text{ant}(1))) = \text{ant}(x^A - \text{ant}(x^A)) = \text{ant}(1) = 0.$$

El significado de una fórmula, fijada una interpretación y una asignación, tiene que ser un valor de verdad. Seguiremos usando 0 para representar el valor falso y 1 para representar el valor verdadero.

La siguiente definición nos permite calcular valores de verdad de fórmulas.

Definición 9.2.3 (Definición por recursión estructural de interpretación de fórmulas)

Dada una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ para un lenguaje de primer orden, y dada una asignación A para esa interpretación, se asocia a cada fórmula del lenguaje φ un valor de verdad $\varphi^{I,A}$ perteneciente a $\{0, 1\}$ de la siguiente forma:

1. Base (FAt):

- $\perp^{I,A} = 0$; $\top^{I,A} = 1$,
- si p es una proposición atómica, $p^{I,A} = p^I$,
- si $s = t$ es la igualdad entre dos términos,

$$(s = t)^{I,A} = \begin{cases} 1 & \text{si } s^{I,A} = t^{I,A}, \\ 0 & \text{si } s^{I,A} \text{ no es igual a } t^{I,A}, \end{cases}$$

- si $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$, entonces

$$\varphi^{I,A} = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad (t_1^{I,A}, \dots, t_n^{I,A}) \in P^I,$$

es decir, si y sólo si los elementos $(t_1^{I,A}, \dots, t_n^{I,A})$ están relacionados mediante la relación P^I ,

2. Paso recursivo:

- $(F\neg)$: si $\varphi = \neg\psi$, entonces

$$\varphi^{I,A} = \neg(\psi^{I,A}),$$

siendo $\neg(0) = 1$ y $\neg(1) = 0$,

- $(F\circ)$: si $\varphi = (\varphi_1 \circ \varphi_2)$, entonces

$$\varphi^{I,A} = \varphi_1^{I,A} \circ \varphi_2^{I,A},$$

donde el valor de $\varphi_1^{I,A} \circ \varphi_2^{I,A}$, viene dado por la tabla 9.1, que coincide con la tabla 5.1 de la lógica proposicional:

$\varphi_1^{I,A}$	$\varphi_2^{I,A}$	$\neg\varphi_1^{I,A}$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Tabla 9.1: Valores de verdad de los conectivos

- $(F\exists)$: si $\varphi = \exists x\psi$, entonces $\varphi^{I,A} = 1$ si y sólo si existe algún elemento del dominio D tal que, después de asignar ese valor a la variable x en ψ , se tiene $\psi^{I,A} = 1$.

De forma equivalente, $\varphi^{I,A} = 1$ si y sólo si existe algún $d \in D$ tal que $\psi^{I,A[x/d]} = 1$,

- $(F\forall)$: si $\varphi = \forall x\psi$, entonces $\varphi^{I,A} = 1$ si y sólo si se tiene $\psi^{I,A} = 1$ para cualquier posible asignación de un elemento del dominio D a la variable x en ψ .

De forma equivalente, $\varphi^{I,A} = 1$ si y sólo si para todo $d \in D$ se verifica que $\psi^{I,A[x/d]} = 1$.

Ejemplos 9.2.4 1) Consideremos la fórmula

$$\varphi = \exists x(P(f(x), a)).$$

En la interpretación (D_1, I_1) definida por:

$$D_1 = \mathbb{R}, a^{I_1} = 2, f^{I_1}(x) = x^2, P^{I_1} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = y\},$$

la fórmula φ se escribe

$$\exists x(x^2 = 2)$$

y tiene valor 1 ya que existe la raíz cuadrada de 2. Notar que, por definición, $P^{I_1} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

En la interpretación (D_2, I_2) definida por:

$$D_2 = \mathbb{C}, a^{I_2} = -2, f^{I_2}(x) = x^2, P^{I_2} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = y\},$$

la fórmula φ se escribe

$$\exists x(x^2 = -2)$$

tiene valor 1 ya que todo número complejo tiene dos raíces cuadradas complejas.

2) Consideremos la fórmula

$$\varphi = \forall x \forall y(P(f(x, y), a) \rightarrow P(x, y))$$

en la interpretación (D_1, I_1) definida por:

$$D_1 = \mathbb{Z}, a^{I_1} = 0, f^{I_1}(x, y) = x - y, P^{I_1} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x < y\}.$$

Con la interpretación dada, la fórmula φ se escribe

$$\forall x \forall y((x - y < 0) \rightarrow x < y)$$

y tiene valor 1.

Sin embargo, si consideramos la interpretación (D_2, I_2) definida por:

$$D_2 = \mathbb{Z}, a^{I_2} = 4, f^{I_2}(x, y) = x - y, P^{I_2} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x < y\},$$

entonces $\varphi^{I_2, A_2} = 0$. En efecto, si $x = 5$ y $y = 2$, se obtiene que $(x - y < 4)$ es cierta, pero $x < y$ es falsa.

9.3 Validez semántica de fórmulas: modelos

Las definiciones y resultados del párrafo anterior nos permiten definir el cálculo de los valores de verdad de una fórmula. Las siguientes definiciones son análogas a las definiciones de satisfacibilidad y validez vistas para fórmulas proposicionales y nos permiten estudiar la validez y clasificar las fórmulas de la lógica de primer orden.

Definición 9.3.1

- Se dice que una fórmula φ es **satisfacible bajo una interpretación** (D, I) cuando se verifica $\varphi^{I,A} = 1$ para **alguna** asignación A .
- Se dice que una fórmula φ es **satisfacible** cuando es satisfacible bajo alguna interpretación (D, I) . Por tanto, una fórmula φ es satisfacible si existen al menos una interpretación (D, I) y una asignación A (relativa a esa interpretación) tales que $\varphi^{I,A} = 1$.
- Si una fórmula no es satisfacible se dice que es **insatisfacible**.
- Se dice que una fórmula φ es **verdadera bajo una interpretación** $\mathbb{I} = (D, I)$ cuando se verifica $\varphi^{I,A} = 1$ para **cualquier** asignación A . En este caso se dice también que $\mathbb{I}$ es un **modelo de** φ y se escribe $\mathbb{I} \models \varphi$.
- Se dice que una fórmula φ es **válida** cuando es verdadera bajo cualquier interpretación, y se denota $\models \varphi$. Por tanto, una fórmula φ es válida si para toda interpretación (D, I) y una asignación A (relativa a esa interpretación) se verifica que $\varphi^{I,A} = 1$.
- Si una fórmula no es válida se dice que es **falsificable**.

Observación 9.3.2 El concepto de fórmula insatisfacible en LPO se corresponde al concepto de fórmula insatisfacible (o contradicción) en LP. Es una fórmula que es siempre falsa.

El concepto de fórmula válida en LPO se corresponde al concepto de fórmula válida (o tautología) en LP. Es una fórmula que es siempre verdadera.

Ejemplo 9.3.3 [F] Sea

$$\varphi : \exists y R(x, f(y, y)).$$

Siendo la variable x libre, φ es abierta.

Sean $D = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$, $R^I = "="$ y $f^I = +$.

Entonces, para una asignación A ,

$$\varphi^{I,A} : \exists y (x^A = 2y).$$

Si A es tal que x^A es un número par, entonces $\varphi^{I,A} = 1$.

Si A es tal que x^A es un número impar, entonces $\varphi^{I,A} = 0$.

Se sigue que φ es satisfacible bajo (D, I) , pero no es verdadera bajo (D, I) .

En particular, φ no es válida.

Ejemplo 9.3.4 [C] Sea

$$\varphi : \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow \exists y Q(y).$$

Sean $D = \{a, b, c\}$, $P^I = \{a, b\}$, $R^I = \{b\}$ y $Q^I = \emptyset$.

Usando la siguiente tabla (el dominio D contiene sólo tres elementos) podemos determinar el valor de la subfórmula $\forall x (P(x) \rightarrow R(x))$:

x	$P^I(x)$	$R^I(x)$	$(P(x) \rightarrow R(x))^I$	$(\forall x(P(x) \rightarrow R(x)))^I$
a	1	0	0	0
b	1	1	1	
c	0	0	1	

Se sigue que $(\forall x(P(x) \rightarrow R(x)))^I = 0$ (esta conclusión se podría haber deducido mirando sólo a la primera fila de la tabla). Por tanto, la fórmula inicial φ tiene valor 1 bajo la interpretación dada, siendo una implicación con premisa siempre falsa. Se deduce que la interpretación (D, I) es un modelo de φ .

Observación 9.3.5 1) Una fórmula φ es válida si y sólo si su negación, $\neg\varphi$, es insatisfacible.

2) Si una fórmula φ es cerrada, dada una interpretación (D, I) , su valor de verdad no depende de la asignación elegida y se puede denotar φ^I .

En este caso φ es satisfacible bajo (D, I) si y sólo si es verdadera bajo (D, I) .

3) Si una fórmula φ (no cerrada) contiene las variables libres

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

se llama **cierre universal de φ** a la fórmula cerrada

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Por tanto, en el caso de una fórmula φ no cerrada:

- φ es verdadera bajo (D, I) si y sólo si $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es verdadera bajo (D, I) y
- φ es válida si y sólo si $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es válida.

NOTA: de las anteriores observaciones se sigue que **basta estudiar la validez de fórmulas cerradas**.

9.4 Evaluación semántica de deducciones

Otro concepto fundamental que vamos a definir es el concepto de consecuencia lógica.

Las definiciones son similares a las vistas en lógica proposicional, teniendo en cuenta que tenemos que reemplazar el concepto de valoración por los de interpretación y asignación.

Definición 9.4.1 Se dice que una fórmula φ es **consecuencia lógica** de un conjunto finito de fórmulas $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ si cualquier interpretación (D, I) y cualquier asignación A que satisfacen todo elemento del conjunto Φ satisfacen también la fórmula φ .

De forma equivalente, φ es consecuencia lógica de Φ si $\varphi_i^{I,A} = 1$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ implica $\varphi^{I,A} = 1$.

Si φ es consecuencia lógica de Φ también se dice que Φ **implica lógicamente** a φ y se escribe $\Phi \models \varphi$.

A continuación recordamos la definición de razonamiento válido y la notación empleada en el capítulo 5.

Definición 9.4.2 Sean $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ un conjunto finito de fórmulas y φ una fórmula. Se define **deducción** o **razonamiento** a la fórmula

$$((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi).$$

Se dice que el razonamiento anterior es **correcto** o **lógicamente válido** si

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \models \varphi,$$

es decir, si el conjunto Φ de las **premisas** o **hipótesis** del razonamiento implica lógicamente a la **conclusión** o **tesis** φ .

Usando la notación ya empleada para la lógica proposicional, para distinguir las premisas de la conclusión, el razonamiento anterior se suele representar por

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \hline \varphi \end{array}$$

El siguiente teorema extiende a la lógica de primer orden la relación existente entre la validez de una fórmula y el concepto de consecuencia lógica ya vista en el contexto de la lógica proposicional.

Teorema 9.4.3 [HLR]

Sean $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ un conjunto finito de fórmulas y φ una fórmula.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1) φ es consecuencia lógica de Φ ,
- 2) $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$ es una fórmula válida (y se escribe $\models ((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi)$),
- 3) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \neg \varphi$ es insatisfacible (**Reducción al absurdo**).

Ejemplo 9.4.4 Volvamos a considerar el razonamiento

$\models t = t$	Reflexividad de la igualdad
$t = t' \models t' = t$	Simetría de la igualdad
$\{t = t', t' = t''\} \models t = t''$	Transitividad de la igualdad
$\{\varphi[x/t], t = t'\} \models \varphi[x/t']$	Sustitutividad de la igualdad
$\forall x \varphi(x) \models \varphi[x/t]$	Hipótesis universal
$\varphi[x/t] \models \exists x \varphi(x)$	Tesis existencial

Tabla 9.2: Tabla de algunas implicaciones lógicas

*Todos los hombres son mortales,
Sócrates es un hombre,
—————
Sócrates es mortal.*

*Vimos que este razonamiento no es válido en lógica proposicional.
Su formalización en lógica de primer orden es*

$$\frac{\forall x(H(x) \rightarrow M(x)), \quad H(s),}{M(s)}.$$

En este caso $\Phi = \{\forall x(H(x) \rightarrow M(x)), H(s)\}$ y $\varphi : M(s)$.

Queremos verificar si Φ implica lógicamente φ .

Sean (D, I) y A tales que

$$(\forall x(H(x) \rightarrow M(x)))^{I,A} = 1, \quad (H(s))^{I,A} = 1.$$

Se trata de verificar si, necesariamente, tiene que ser $M(s)^{I,A} = 1$. Por definición, $(\forall x(H(x) \rightarrow M(x)))^{I,A} = 1$ si y sólo si $(H(x) \rightarrow M(x))^{I,A} = 1$ para todo $x^A \in D$. En particular, $(H(s) \rightarrow M(s))^{I,A} = 1$. Siendo $H(s)^{I,A}$ y $M(s)^{I,A}$ fórmulas proposicionales, la condición anterior es equivalente a $(\neg H(s) \vee M(s))^{I,A} = 1$.

Por hipótesis sabemos que $(H(s))^{I,A} = 1$, es decir, que $(\neg H(s))^{I,A} = 0$.

Se sigue que para que se verifique $(\neg H(s) \vee M(s))^{I,A} = 1$ tiene que ser $(M(s))^{I,A} = 1$.

Por tanto Φ implica lógicamente φ .

Ejemplo 9.4.5 [HLR] *Se puede verificar (ver ejercicio 9.6.7) que las fórmulas de la tabla 9.2 son implicaciones lógicas.*

9.5 Equivalencia de fórmulas

9.5.1 Sustitución de una variable por un término

Sea φ una fórmula que contenga una variable x . Si queremos sustituir la variable x por un término t para obtener la nueva fórmula $\varphi[x/t]$, es necesario no modificar el significado de la fórmulas original.

En la nueva fórmula $\varphi[x/t]$, ver [HLR],

- sólo las apariciones libres de x en φ se reemplazan por t ,
- si algún cuantificador de φ hace que queden ligadas variables de t después de la sustitución, la variable ligada de esa cuantificación se reemplaza por otra.

Ejemplo 9.5.1 [MH]

Sea

$$\varphi : \forall x R(x, y)$$

y sea $\mathbb{I} = (D, I)$ la interpretación con dominio $D = \mathbb{N}$ (los números naturales) y $R^I(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \leq y\}$ (la relación de orden usual en $\mathbb{N}$).

Sustituyendo la variable libre y por z obtenemos la fórmula

$$\varphi[y/z] : \forall x R(x, z),$$

y no se altera el significado de φ . Las dos fórmulas son falsas bajo $\mathbb{I} = (D, I)$, ya que el conjunto $\mathbb{N}$ no tiene máximo.

Sin embargo, si sustituimos y por x obtenemos la fórmula

$$\varphi[y/x] : \forall x R(x, x)$$

que es verdadera bajo $\mathbb{I} = (D, I)$, siendo cierto que un cualquier número natural n verifica que $n \leq n$ (es la propiedad reflexiva de la relación).

Para sustituir y por x sin alterar el significado de la fórmula y el tipo de ocurrencia de sus variables, tendríamos que cambiar de nombre también a la variable x . Por ejemplo, se puede sustituir x por v y y por x . Así se obtiene la fórmula:

$$\varphi[x/v, y/x] : \forall v R(v, x).$$

Respetando los dos criterios anteriores, se puede definir recursivamente y rigurosamente la noción de sustitución de una variable por un término. Además, se puede demostrar el **lema de sustitución** [HLR], que afirma que interpretar la fórmula $\varphi[x/t]$ en una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ y una asignación A es lo mismo que interpretar la fórmula original φ en la misma interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ y en la asignación $A[x/t]$.

Ejemplo 9.5.2 [HLR] *Sea $\varphi : \exists z(x \cdot z = y)$ en el dominio de los números naturales $\mathbb{N}$ con el producto y la suma usuales. Para sustituir correctamente la variable y por $z + z$, tendremos que escribir*

$$\varphi[y/z + z] : \exists u(x \cdot u = z + z).$$

Observación 9.5.3 *En informática, la operación de sustitución es importante en la verificación de programas. La ejecución de un programa tiene como efecto la transformación del estado de unas variables de una condición inicial a una condición final. Verificar un programa consiste en demostrar que, si el estado inicial de las variables cumple una cierta condición inicial, entonces su estado final cumple con la condición final deseada. Las condiciones iniciales y finales se suelen representar por medio de fórmulas de la lógica de primer orden. Para asignar valores a estas condiciones se introduce una interpretación que representa el tipo de datos sobre el cuál se puede operar (ver, por ejemplo, [HLR] o [C]).*

9.5.2 Equivalencia de fórmulas

El último concepto fundamental que vamos a estudiar en este capítulo es el concepto de equivalencia lógica entre fórmulas. Las definiciones y resultados son similares a los ya estudiados para la lógica proposicional en el capítulo 5. Para la lógica de primer orden tendremos que añadir a nuestra lista las equivalencias relativas a los cuantificadores, que no aparecen en la lógica proposicional.

Definición 9.5.4 *Sean φ y ψ dos fórmulas. Se dice que φ equivale lógicamente a ψ si y sólo si*

$$\varphi \models \psi \quad y \quad \psi \models \varphi.$$

Si φ y ψ son equivalentes se escribe $\varphi \equiv \psi$.

Observación 9.5.5 *Se sigue de la definición que si φ y ψ son dos fórmulas equivalentes, entonces tienen los mismos valores de verdad bajo una cualquier interpretación y asignación. Por tanto, no es difícil verificar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\varphi \equiv \psi$.
- $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.
- $\models \varphi \rightarrow \psi$ y $\models \psi \rightarrow \varphi$.

Las tablas 9.3 (ver la correspondiente tabla 5.4 para la lógica proposicional) y 9.4 contienen las principales equivalencias relativas a conectivos y cuantificadores, respectivamente.

Observación 9.5.6 *También en la lógica de primer orden la relación de equivalencia entre fórmulas es reflexiva, simétrica y transitiva (ver la observación 5.5.4 del capítulo 5). Por tanto es una relación binaria de equivalencia sobre el conjunto de todas las fórmulas. Dos fórmulas pertenecen a la misma clase de equivalencia si y sólo si tienen los mismos valores de verdad bajo una cualquier interpretación y asignación.*

$\varphi \wedge \top \equiv \varphi \quad \varphi \wedge \perp \equiv \perp$ $\varphi \vee \top \equiv \top \quad \varphi \vee \perp \equiv \varphi$	Leyes de Identidad
$\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \perp$	No contradicción
$\varphi \vee \neg\varphi \equiv \top$	Tercio excluso
$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi \quad \varphi \vee \varphi \equiv \varphi$	Idempotencia
$\varphi_1 \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \varphi_1 \quad \varphi_1 \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \varphi_1$	Absorción
$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \varphi_2 \wedge \varphi_1 \quad \varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \varphi_2 \vee \varphi_1$ $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \equiv (\varphi_2 \leftrightarrow \varphi_1)$	Conmutatividad
$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 \equiv \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$ $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3 \equiv \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$	Asociatividad
$\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$ $\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$ $\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \rightarrow \varphi_3)$ $\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \vee (\varphi_1 \rightarrow \varphi_3)$ $\varphi_1 \leftrightarrow (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_3)$ $\varphi_1 \leftrightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \vee (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_3)$	Distributividad
$\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$	Doble negación
$(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_2 \rightarrow \neg\varphi_1)$	Ley de contraposición
$\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2$ $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$	Leyes de De Morgan
$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \equiv \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$	Interdefinición
$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \equiv (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$	Coimplicación

Tabla 9.3: Equivalencias relativas a conectivos lógicos

$\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$	$\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$
$\forall x\varphi_1 \wedge \forall x\varphi_2 \equiv \forall x(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	$\exists x\varphi_1 \vee \exists x\varphi_2 \equiv \exists x(\varphi_1 \vee \varphi_2)$
$\forall x\forall y\varphi \equiv \forall y\forall x\varphi$	$\exists x\exists y\varphi \equiv \exists y\exists x\varphi$
$(\forall x\varphi_1) \vee \varphi_2 \equiv \forall x(\varphi_1 \vee \varphi_2) *$	$(\forall x\varphi_1) \wedge \varphi_2 \equiv \forall x(\varphi_1 \wedge \varphi_2) *$
$(\exists x\varphi_1) \vee \varphi_2 \equiv \exists x(\varphi_1 \vee \varphi_2) *$	$(\exists x\varphi_1) \wedge \varphi_2 \equiv \exists x(\varphi_1 \wedge \varphi_2) *$

* Sólo si x no aparece libre en φ_2

Tabla 9.4: Equivalencias relativas a cuantificadores

Los siguientes resultados, ver [HLR], garantizan que la equivalencia lógica se preserva si, en una dada fórmula χ , reemplazamos una subfórmula φ por otra subfórmula ψ , equivalente a φ .

Teorema 9.5.7 *Sea $\chi(\varphi)$ una fórmula que contiene una subfórmula φ y sea $\chi(\psi)$ la fórmula obtenida reemplazando la subfórmula φ por ψ .*

Si $\varphi \equiv \psi$, entonces

$$\chi(\varphi) \equiv \chi(\psi).$$

Teorema 9.5.8 *Sean χ_1 y χ_2 dos fórmulas equivalentes. Reemplazando en χ_1 y χ_2 unos símbolos de proposiciones $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ por unas fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, se obtiene la equivalencia*

$$\chi_1[p_1/\varphi_1, p_2/\varphi_2, \dots, p_n/\varphi_n] \equiv \chi_2[p_1/\varphi_1, p_2/\varphi_2, \dots, p_n/\varphi_n].$$

Ejemplo 9.5.9 *Sea $\chi : \forall x(P(x) \wedge p \rightarrow Q(f(y)) \vee q)$. Sabemos, por interdefinición, que la subfórmula $\varphi : P(x) \wedge p \rightarrow Q(f(y)) \vee q$ es equivalente a la fórmula $\psi : \neg P(x) \vee \neg p \vee Q(f(y)) \vee q$. Entonces*

$$\forall x(P(x) \wedge p \rightarrow Q(f(y)) \vee q) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee \neg p \vee Q(f(y)) \vee q).$$

Además, si en esta última equivalencia sustituimos las proposiciones $\{p, q\}$ por las fórmulas $\{f(y), g(u, v)\}$, se obtiene la equivalencia

$$\forall x(P(x) \wedge f(y) \rightarrow Q(f(y)) \vee g(u, v)) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee \neg f(y) \vee Q(f(y)) \vee g(u, v)).$$

Observación 9.5.10 (Conjuntos de conectivos)

Como vimos en el capítulo 5 para la lógica proposicional, a partir de las equivalencias de las tablas 9.3 y 9.4 es posible demostrar que en el lenguaje de la lógica de primer orden es suficiente emplear sólo los conectivos $\{\exists, \neg, \wedge\}$.

De forma similar, los conjuntos $\{\exists, \neg, \vee\}$ y $\{\forall, \neg, \wedge, \vee\}$ permiten representar cualquier fórmula bien construida por medio de una fórmula equivalente, en la cual aparecen sólo los conectivos de los conjuntos indicados (ver ejercicio 9.6.13).

9.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio 9.6.1 Dada la fórmula

$$\varphi : \exists y(P(y) \vee \forall x(P(x) \rightarrow Q(z))),$$

calcula todas las posibles interpretaciones de φ en el dominio de dos elementos $D = \{a, b\}$.

Ejercicio 9.6.2 [C] Considera la fórmula $P(y) \vee (\forall x(q \rightarrow P(x)))$, donde q es una proposición atómica. Se pide evaluar la fórmula anterior en la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ donde $D = \{a, b, c\}$, $q^I = 1$, $P^I = \{a, b\}$ y con una asignación A tal que $y^A = c$.

Ejercicio 9.6.3 [A]

Sea la frase “Todos los del vecindario odian a una persona.”

a) Formaliza la frase dada en lógica de primer orden, siendo el dominio D el conjunto de las personas.

b) Sea $D = \{p_1, p_2, p_3\}$ y sea I definida por las condiciones:

- p_1 y p_2 pertenecen al vecindario, pero p_3 no.
- p_3 no odia a nadie.
- p_1 y p_2 sólo odian a p_3 .

Evalúa el valor de la fórmula obtenida en el apartado a) bajo la interpretación (D, I) .

Ejercicio 9.6.4 [A] Sea $\varphi : (P(x) \wedge \forall x(R(x) \wedge P(y))) \rightarrow \exists yQ(x, y)$.

Evalúa φ con $D = \{a, b\}$, $P^I = \{a\}$, $R^I = \{b\}$, $Q^I = \{(a, a), (b, b)\}$ y $x^A = a$, $y^A = b$.

Ejercicio 9.6.5 Dada la fórmula:

$$\varphi : (\exists xP(x)) \wedge (\exists xQ(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x)),$$

define una interpretación tal que φ sea válida y una tal que no lo sea. Concluye que esa fórmula no es semánticamente válida.

Ejercicio 9.6.6 Tomando como dominio D el conjunto de las personas, formaliza las siguientes frases. Para cada una de ellas halla una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$, con dominio el conjunto de las personas, que la hace falsa.

1. Dos hermanos que compartan el mismo coche y tengan la misma edad, necesariamente son amigos y tienen alguna afición en común.
2. Los jugadores de fútbol son amigos de los jugadores de pelota vasca.
3. Algunos jugadores de fútbol son amigos de los jugadores de pelota vasca.
4. Algunos jugadores de fútbol sólo son amigos de jugadores de pelota vasca.

Ejercicio 9.6.7 Verifica las implicaciones lógicas de la tabla 9.2.

Ejercicio 9.6.8 Formaliza el siguiente argumento a la lógica de primer orden:

Los que salen hoy de viaje cogerán el autobús. Los ejecutivos viajan siempre en avión. Todos los de mi empresa viajan con maletín. Nadie que haya viajado en avión volverá a hacerlo en autobús. Nadie viaja con maletín a no ser que sea un ejecutivo. Por tanto: nadie en mi empresa sale hoy de viaje.

Prueba la validez semántica de dicho argumento.

Ejercicio 9.6.9 Considera el dominio $D = \{a, b\}$. Sabemos inicialmente que $P(a)$ es cierto y $P(b)$ es falso. Estudia la satisfacibilidad de los siguientes argumentos bajo cualquier interpretación con dominio D :

$$\frac{\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))}{\forall x(P(x) \wedge R(x))}, \quad \frac{\exists x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))}{\exists x(P(x) \wedge R(x))}$$

Estudia la satisfacibilidad de los argumentos anteriores eliminando las hipótesis sobre $P(a)$ y $P(b)$. ¿Son razonamientos válidos?

Ejercicio 9.6.10 Consideramos el dominio $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Consideramos la interpretación I sobre el dominio D que viene dada por los símbolos de predicado:

$P(x)$: x es par

$M(x, y)$: x es múltiplo de y ,

el símbolo de función:

$$o(x) = 11 - x$$

y la constante 3 que representa al número 3.

Evalúa las siguientes fórmulas en esta interpretación. Justifica tu respuesta en cada caso.

$$\varphi_1 : \exists x(x = o(x))$$

$$\varphi_2 : \forall x(x = o(o(x)))$$

$$\varphi_3 : \exists x(P(x) \wedge M(x, 3))$$

$$\varphi_4 : \forall x(M(x, 3) \rightarrow P(x))$$

$$\varphi_5 : \exists x \forall y M(x, y)$$

$$\varphi_6 : \forall x(P(o(x)) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge M(y, x)))$$

Ejercicio 9.6.11 Consideramos el par de fórmulas

$$\varphi : \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \longrightarrow P(x, z))$$

$$\psi : \forall x \forall y (P(x, y) \longrightarrow P(y, x))$$

donde P es un símbolo de predicado de aridad 2. Consideramos también el dominio formado por tres elementos $D = \{a, b, c\}$. Define cuatro interpretaciones distintas I_1, I_2, I_3, I_4 con dominio D que cumplan:

- $\varphi^{I_1} = 1, \quad \psi^{I_1} = 1$
- $\varphi^{I_2} = 0, \quad \psi^{I_2} = 0$
- $\varphi^{I_3} = 1, \quad \psi^{I_3} = 0$
- $\varphi^{I_4} = 0, \quad \psi^{I_4} = 1$

Ejercicio 9.6.12 Usando las equivalencias estudiadas, simplifica las expresiones halladas como negaciones formales de las frases del ejercicio 8.5.5 del capítulo 8.

Ejercicio 9.6.13 Verifica que los conjuntos de conectivos de la observación 9.5.10

$$\{\exists, \neg, \wedge\}, \{\exists, \neg, \vee\} \text{ y } \{\forall, \neg, \wedge, \vee\}$$

son completos en la lógica de primer orden.

Ejercicio 9.6.14 En cada apartado, verifica si las dos fórmulas dadas son equivalentes:

- a) $\varphi_1 : P(x) \rightarrow \forall x Q(x), \quad \varphi_2 : \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)).$
- b) $\varphi_1 : \exists x P(x) \wedge Q(x), \quad \varphi_2 : \exists x (P(x) \wedge Q(x)).$

Ejercicio 9.6.15 Considera las dos fórmulas de la lógica de primer orden:

$$\varphi_1 : \forall y \exists x (P(x) \wedge Q(y) \rightarrow R(x)),$$

$$\varphi_2 : \exists x \forall y (P(x) \wedge (Q(y) \rightarrow R(x))),$$

donde P, Q y R son símbolos de predicado de aridad 1. Determina si las dos fórmulas φ_1 y φ_2 son equivalentes.

Capítulo 10

Teoría de la demostración y sistema de deducción natural de Gentzen

En este capítulo estudiaremos la extensión del sistema de deducción natural a la lógica de primer orden.

Recordamos que la **teoría de la demostración** nos proporciona métodos alternativos a los métodos semánticos para averiguar

- **la validez de una fórmula:** si φ es una fórmula válida se dice que es **demostrable** y se escribe $\vdash \varphi$.
- **si una fórmula φ es consecuencia lógica de un conjunto de premisas Φ :** si φ es consecuencia lógica de Φ se dice que φ es **deducible** en el sistema a partir de Φ y se escribe $\Phi \vdash \varphi$.

Las definiciones generales de sistema formal axiomático, teorema, deducción, métodos directos y por refutación son las mismas estudiadas en la sección 6.1 del capítulo 6. Las iremos empleando a lo largo de todo el capítulo.

A partir del sistema de Kleene para la lógica de primer orden (ver apéndice A) es posible demostrar la validez del análogo del teorema de la deducción 6.1.9, que permiten establecer la relación entre deducciones correctas y fórmulas válidas en el contexto de la lógica de predicados.

Teorema 10.0.1 (Teorema de la deducción) Sean $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ un conjunto de fórmulas y φ una fórmula.

Entonces

$$a) \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi \quad \text{implica que} \quad \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}\} \vdash (\varphi_n \rightarrow \varphi)$$

siempre que φ no se deduzca de φ_n por medio de una regla de generalización condicional universal o existencial (ver A).

$$b) \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}\} \vdash (\varphi_n \rightarrow \varphi) \quad \text{implica que} \quad \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi.$$

La restricción sobre la validez de la implicación en el apartado a) del teorema de la deducción tiene como importante consecuencia el hecho de que, en la lógica de primer orden, no es siempre posible encontrar una fórmula válida que represente a una deducción correcta. Por tanto, no existe un análogo del corolario 6.1.10 de la lógica proposicional.

Ya comentamos que en la lógica de primer orden no existe ningún método de demostración que sea decidible. Por tanto, la extensión de la teoría de los tableaux sintácticos a la lógica de primer orden no puede proporcionar un método eficaz y finito para establecer la satisfacibilidad de una fórmula.

10.1 Definición del sistema de deducción natural de Gentzen

La extensión del sistema de deducción natural de la lógica proposicional a la lógica de predicados mantiene su carácter intuitivo, ya que se basa en deducciones. Las ocho reglas de inferencia de la definición de este sistema del capítulo 6 siguen valiendo y tienen ahora que ser completadas por reglas de inferencia para los cuantificadores.

Reglas del sistema de deducción natural para los cuantificadores:

(I $\forall$): Regla de introducción del cuantificador universal

$$\varphi(y) \vdash \forall x \varphi(x).$$

NOTA: la forma de interpretar esta regla NO es que de la validez de $\varphi(y)$ para un elemento del dominio y se deduce la validez de $\varphi(x)$ para todo elemento x .

Lo que se entiende con la notación empleada es que en $\varphi(y)$ la variable y representa un cualquier elemento del dominio, no un elemento especificado.

Con la notación de Fitting (I $\forall$) se representa como:

$$\boxed{\begin{array}{c} y \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdash \varphi(y) \end{array}}$$

$$\vdash \forall x \varphi(x)$$

Notar también que y NO es una premisa auxiliar de una subdeducción. La notación de Fitting que estamos empleando es de una subdeducción

Ejemplo 10.1.1 [A] Para poder deducir que “Todos los leones son carnívoros” en el dominio D de los leones, siendo $C(x) : x$ es carnívoro, se puede usar la regla $(I\forall)$ y escribir

$$\vdash \forall x C(x)$$

$$\forall x\varphi(x) \vdash \varphi(t)$$

Una fórmula que se verifica para todo elemento del dominio, se verifica para cualquier t .

Queremos demostrar la deducción

$$\begin{array}{l} 1) \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \quad (Premisa) \\ 2) \varphi(a) \quad (Premisa) \\ 3) \vdash \varphi(a) \rightarrow \psi(a) \quad (E \forall(1)) \\ 4) \vdash \psi(a) \quad (E \rightarrow(2,3)). \end{array}$$

$$\varphi(a) \vdash \exists x \varphi(x),$$

Si $\varphi(a)$ es verdadera, entonces $\exists x\varphi(x)$ es verdadera.

Ejemplo 10.1.3 [A] *Queremos demostrar la deducción*

$$\{\varphi(b), \exists x\varphi(x) \rightarrow \psi(a)\} \vdash \psi(a),$$

siendo a y b constantes del dominio.

- 1) $\varphi(b)$ (Premisa)
- 2) $\exists x\varphi(x) \rightarrow \psi(a)$ (Premisa)
- 3) $\vdash \exists x\varphi(x)$ (I $\exists$ (1))
- 4) $\vdash \psi(a)$ ($E \rightarrow$ (3,2)).

(E $\exists$): Regla de eliminación del cuantificador existencial

$$\{\exists x\varphi(x), \varphi(y) \rightarrow \psi\} \vdash \psi,$$

donde ψ no contiene la variable libre y .

NOTA: (E $\exists$) NO tiene la forma $\exists x\varphi(x) \vdash \varphi(y)$, ya que no sabemos si y hace que $\varphi(y)$ sea verdadera.

También en este caso, lo que se entiende con la notación empleada es que en $\varphi(y)$ la variable y representa un cualquier elemento del dominio, no un elemento especificado.

Con la notación de Fitting (E $\exists$) se representa como:

$$1) \exists x\varphi(x)$$

2) $\varphi(y)$ (Premisa auxiliar)
$\vdots$
$\vdots$
$k) \vdash \psi$

$$k+1) \vdash \varphi(y) \rightarrow \psi \quad (I \rightarrow(2,k))$$

$$k+2) \vdash \psi \quad (E \exists(1,(2,k))).$$

Ejemplo 10.1.4 [A]

Queremos demostrar la deducción

$$\{\exists x\varphi(x), \exists x\psi(x)\} \vdash \exists x\exists y(\varphi(x) \wedge \psi(y)).$$

1) $\exists x\varphi(x)$ (Premisa)

2) $\exists x\psi(x)$ (Premisa)

3) $\varphi(z)$ (Premisa auxiliar)

4) $\psi(u)$ (Premisa auxiliar)

5) $\vdash \varphi(z) \wedge \psi(u)$ ($I \wedge (3,4)$)

6) $\vdash \exists x\exists y(\varphi(x) \wedge \psi(y))$ ($I \exists (5)$)

7) $\vdash \psi(u) \rightarrow \exists x\exists y(\varphi(x) \wedge \psi(y))$ ($I \rightarrow (4,6)$)

8) $\vdash \exists x\exists y(\varphi(x) \wedge \psi(y))$ ($E \exists (2,7)$)

9) $\vdash \varphi(z) \rightarrow \exists x\exists y(\varphi(x) \wedge \psi(y))$ ($I \rightarrow (3,8)$)

10) $\vdash \exists x\exists y(\varphi(x) \wedge \psi(y))$ ($E \exists (1,9)$).

10.1.1 Reglas derivadas del sistema de deducción natural

A partir de las reglas de introducción y eliminación relativas a los cuantificadores, podemos obtener nuevos resultados.

A continuación enunciamos algunos de ellos [A]:

- **T31: (Cambio de variable cuantificada)**

T31.1 : $\forall x\varphi(x) \vdash \forall y\varphi(y)$,

T31.2 : $\forall y\varphi(y) \vdash \forall x\varphi(x)$,

T31.3 : $\exists x\varphi(x) \vdash \exists y\varphi(y)$,

T31.4 : $\exists y\varphi(y) \vdash \exists x\varphi(x)$.

Demostración de T31.1 y T31.2:

1) $\forall x\varphi(x)$ (Premisa)

2) z

3) $\vdash \varphi(z)$ ($E\forall(1)$)

4) $\vdash \forall y\varphi(y)$ ($I\forall(2,3)$)

La demostración de **T31.3** y **T31.4** es similar.

- **T32: Descenso cuantificacional**

$$\forall x\varphi(x) \vdash \exists x\varphi(x).$$

- **T33: Conmutatividad**

$$\mathbf{T33.1} : \exists x\exists y\varphi(x, y) \vdash \exists y\exists x\varphi(x, y),$$

$$\mathbf{T33.2} : \exists y\exists x\varphi(x, y) \vdash \exists x\exists y\varphi(x, y).$$

$$\mathbf{T33.3} : \forall x\forall y\varphi(x, y) \vdash \forall y\forall x\varphi(x, y),$$

$$\mathbf{T33.4} : \forall y\forall x\varphi(x, y) \vdash \forall x\forall y\varphi(x, y).$$

- **T34: Reglas de la conjunción**

$$\mathbf{T34.1} : \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x).$$

$$\mathbf{T34.2} : \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)),$$

$$\mathbf{T34.3} : \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x).$$

$$\mathbf{T34.3} : \exists x(\varphi \wedge \psi(x)) \vdash \varphi \wedge \exists x\psi(x),$$

$$\mathbf{T34.4} : \varphi \wedge \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi \wedge \psi(x)).$$

$$\mathbf{T34.5} : \forall x(\varphi \wedge \psi(x)) \vdash \varphi \wedge \forall x\psi(x),$$

$$\mathbf{T34.6} : \varphi \wedge \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi \wedge \psi(x)).$$

- **T35: Reglas de la disyunción**

$$\mathbf{T35.1} : \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x),$$

$$\mathbf{T35.2} : \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

$$\mathbf{T35.3} : \forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

$$\mathbf{T35.4} : \varphi \vee \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi \vee \psi(x)),$$

$$\mathbf{T35.5} : \exists x(\varphi \vee \psi(x)) \vdash \varphi \vee \exists x\psi(x).$$

$$\mathbf{T35.6} : \varphi \vee \forall x\psi(x) \vdash \forall x(\varphi \vee \psi(x)),$$

$$\mathbf{T35.7} : \forall x(\varphi \vee \psi(x)) \vdash \varphi \vee \forall x\psi(x).$$

- **T36: Reglas de la implicación**

$$\mathbf{T36.1} : \exists x \varphi(x) \rightarrow \exists x \psi(x) \vdash \exists x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)),$$

$$\mathbf{T36.2} : \forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \vdash \forall x \varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x).$$

$$\mathbf{T36.3} : \exists x \psi(x) \rightarrow \varphi \vdash \exists x (\psi(x) \rightarrow \varphi),$$

$$\mathbf{T36.4} : \forall x (\psi(x) \rightarrow \varphi) \vdash \forall x \psi(x) \rightarrow \varphi.$$

$$\mathbf{T36.5} : \forall x (\varphi \rightarrow \psi(x)) \vdash \varphi \rightarrow \forall x \psi(x).$$

- **T37: Reglas de eliminación de la negación de un cuantificador**

$$\mathbf{T37.1} (\mathbf{E}\neg\forall) : \neg\forall x \varphi(x) \vdash \neg\varphi(a),$$

$$\mathbf{T37.2} (\mathbf{E}\neg\exists) : \neg\exists x \varphi(x) \vdash \neg\varphi(y),$$

donde a es una constante e y es un cualquier elemento del dominio (ver ejercicios 10.3.2 y 10.3.3).

10.2 Corrección, completitud y decidibilidad

En el capítulo 6 vimos que los sistemas de demostración estudiados para la lógica proposicional cumplen las tres propiedades de completitud, corrección y decidibilidad.

Existen varios sistemas de demostración en lógica de primer orden que son completos y correctos (la completitud fue demostrada por Gödel en 1930).

Sin embargo, no existe ningún sistema de demostración en LPO que sea decidible.

La coherencia entre teoría interpretativa y teoría de la demostración axiomática sigue valiendo para la lógica de primer orden:

Teorema 10.2.1 *[A] Una fórmula de la lógica de primer orden es semánticamente válida en teoría interpretativa si y sólo si es formalmente válida en teoría de la demostración axiomática.*

A continuación veremos como este teorema implica la completitud y la coherencia de los sistemas de demostración de la lógica de primer orden.

- **Completitud**

Recordamos que se dice que un sistema de demostración axiomático es **completo** si es capaz de demostrar cualquier fórmula semánticamente válida y deducir cualquier consecuencia lógica.

Por tanto, el teorema 10.2.1 anterior tiene como consecuencia la completitud del cálculo de predicados de primer orden.

- **Corrección**

Recordamos que se dice que un sistema de demostración es **correcto (consistente, coherente)** si todas las fórmulas demostrables en el sistema son semánticamente válidas y todas las fórmulas deducibles en el sistema a partir de un conjunto de premisas son consecuencia lógica de dichas premisas.

Por tanto, el teorema 10.2.1 anterior tiene como consecuencia también la corrección del cálculo de predicados de primer orden.

- **Decidibilidad**

Finalmente, recordamos que se dice que un sistema de demostración es **decidible** si proporciona un procedimiento general y finito (aplicable a cualquier fórmula y que termine) que permita decidir si una fórmula es válida o deducible a partir de un conjunto de fórmulas.

No existe ningún sistema de demostración en LPO que sea decidible: Church demostró en 1936 que no existe ningún algoritmo que permita decidir si una fórmula cualquiera de la lógica de primer orden es o no es válida, es decir, la validez de fórmulas en LPO es un problema indecidible (obsérvese que el mismo problema en lógica de proposiciones sí es decidible: en este caso, para saber si una fórmula es válida basta con calcular su tabla de verdad).

Aunque la validez de las fórmulas en LPO no es decidible en general, sí lo es en los siguientes casos particulares:

- cuando se consideran exclusivamente dominios finitos,
- cuando se admiten exclusivamente predicados monádicos,
- incluso en el caso de dominios infinitos y predicados poliádicos, existen algunas clases particulares de fórmulas para las que su validez sí es decidible.

Por otro lado, la validez de las fórmulas en LPO, aunque indecidible, es un problema *semi-decidible* en el siguiente sentido: existen sistemas de demostración tales que

- si una fórmula es válida, son capaces de demostrar que lo es,
- para fórmulas no válidas, el proceso puede no terminar nunca.

10.3 Ejercicios propuestos

Ejercicio 10.3.1 *En el sistema de deducción natural, demuestra las reglas de descenso cuantificacional **T32** y de conmutatividad **T33**.*

Ejercicio 10.3.2 *En el sistema de deducción natural, demuestra los siguientes teoremas:*

$$\vdash \exists x \neg \varphi(x) \rightarrow \neg \forall x \varphi(x),$$

$$\vdash \forall x \neg \varphi(x) \rightarrow \neg \exists x \varphi(x),$$

$$\vdash \neg \exists x \varphi(x) \rightarrow \forall x \neg \varphi(x),$$

$$\vdash \neg \forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \neg \varphi(x).$$

Ejercicio 10.3.3 [MH] *Usando los resultados del ejercicio anterior, demuestra la validez de las siguientes reglas en el sistema de deducción natural:*

$$(E\neg\forall) : \neg\forall x\varphi(x) \vdash \neg\varphi(a),$$

$$(E\neg\exists) : \neg\exists x\varphi(x) \vdash \neg\varphi(y),$$

donde a es una constante e y es un cualquier elemento del dominio.

Ejercicio 10.3.4 *Formaliza el siguiente razonamiento en el dominio D de todos los animales. En el sistema de deducción natural, demuestra su validez.*

Ningún felino quiere comer plátanos.

Ningún mono no quiere comer plátanos.

Todos los gatos son felinos.

Por tanto: los gatos no son monos.

Capítulo 11

Problemas de repaso resueltos

Este capítulo contiene los textos y las soluciones de varios exámenes, que incluimos para que puedan ser usados como repaso de todo el material de la asignatura.

Es muy importante que el alumno intente resolver todos los problemas presentados en el tiempo indicado en cada examen.

11.1 Segundo examen parcial 2006-2007

Fecha: 23 de enero de 2007 Tiempo: 50 minutos

El examen está formado por dos problemas. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1) a) (3 puntos) Identifica las variables libres y ligadas de la fórmula

$$\varphi : \exists x(\exists y P(y, z) \rightarrow P(x, z))$$

y verifica que φ es satisfacible bajo alguna interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que P^I no es el conjunto vacío.

b) (4 puntos) Determina si la fórmula

$$\psi : \exists x(\exists y P(y) \rightarrow P(x))$$

es semánticamente válida.

2) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen de la lógica de primer orden, verifica la validez de los siguientes razonamientos:

a) (2 puntos)

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi,$$

b) (6 puntos)

$$\frac{\forall x R(x) \vee \forall y \neg P(y) \quad \neg \exists z (P(z) \wedge R(z))}{\forall y \neg P(y)}$$

11.2 Soluciones del segundo examen parcial 2006-2007

Fecha: 23 de enero de 2007 Tiempo: 50 minutos

1) a) (3 puntos) Identifica las variables libres y ligadas de la fórmula

$$\varphi : \exists x(\exists y P(y, z) \rightarrow P(x, z))$$

y verifica que φ es satisfacible bajo alguna interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que P^I no es el conjunto vacío.

b) (4 puntos) Determina si la fórmula

$$\psi : \exists x(\exists y P(y) \rightarrow P(x))$$

es semánticamente válida.

Solución:

a) La fórmula

$$\varphi : \exists x(\exists y P(y, z) \rightarrow P(x, z))$$

es abierta, ya que la variable z es libre. Las variables x y y son ligadas.

Sea $\mathbb{I}$ la interpretación con dominio $D = \{a, b\}$ y

$$I : P^I = \{(a, a)\} \subset D \times D.$$

Consideremos, por ejemplo, la asignación

$$A : z^A = b.$$

Se obtiene que

$$\varphi^{I,A} = (\exists x(\exists y P(y, b) \rightarrow P(x, b)))^{I,A} = 1$$

ya que

$$(\exists y P(y, b) \rightarrow P(a, b))^{I,A} = 1,$$

siendo

$$(\exists y P(y, b))^{I,A} = 0.$$

Se sigue que φ es satisfacible bajo $\mathbb{I} = (D, I)$.

b) Sea $\mathbb{I} = (D, I)$ una interpretación cualquiera de

$$\psi : \exists x(\exists y P(y) \rightarrow P(x)).$$

Hay dos casos posibles:

- si $(\exists y P(y))^I = 0$, entonces $(\exists y P(y) \rightarrow P(x))^I = 1$ para todo x y ψ^I es verdadera,
- si $(\exists y P(y))^I = 1$, entonces existe al menos un elemento del dominio $a \in D$ tal que $P^I(a) = 1$ y, por tanto, $(\exists y P(y) \rightarrow P(a))^I = 1$. También en este caso $\psi^I = 1$.

Podemos concluir que ψ es semánticamente válida.

2) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen de la lógica de primer orden, verifica la validez de los siguientes razonamientos:

a) (2 puntos)

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi,$$

b) (6 puntos)

$$\frac{\forall x R(x) \vee \forall y \neg P(y) \quad \neg \exists z (P(z) \wedge R(z))}{\forall y \neg P(y)}$$

Solución:

a)

1) φ	(Premisa)
2) $\vdash \neg\neg\neg\varphi$	(Premisa auxiliar)
3) $\vdash \neg\varphi$	(E $\neg$ (2))
4) $\vdash \neg\varphi \wedge \varphi$	(I $\wedge$ (3,1))
5) $\vdash \neg\neg\varphi$	(I $\neg$ (2,4))

El razonamiento $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$ es válido.

b)

- 1) $\forall x R(x) \vee \forall y \neg P(y)$ (Premisa)
- 2) $\neg \exists z (P(z) \wedge R(z))$ (Premisa)
- 3) $\vdash \forall z \neg (P(z) \wedge R(z))$ (E $\neg$ ∃(2))
- 4) $\vdash \forall z (\neg P(z) \vee \neg R(z))$ (De Morgan(3))

5) y_1

- 6) $\vdash \neg P(y_1) \vee \neg R(y_1)$ (E∇(4))

7) $\vdash \forall x R(x)$ (Premisa auxiliar)

8) $\vdash R(y_1)$ (E∇(7))

9) $\vdash \neg \neg R(y_1)$ (Apartado a))

10) $\vdash \neg P(y_1)$ (Tollendo Ponens (9,6))

11) $\vdash \forall y \neg P(y)$ (Premisa auxiliar)

12) $\vdash \neg P(y_1)$ (E∇(11))

13) $\vdash \neg P(y_1)$ (E∇(1,(7,12)))

14) $\vdash \forall y \neg P(y)$ (I∇(5,13))

El razonamiento dado es válido.

11.3 Examen final A de febrero 2005-2006

Fecha: 1 de febrero de 2006 **Tiempo:** 3 horas

El examen está formado por ocho problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra por reducción al absurdo la validez de la siguiente deducción:

$$\{p \rightarrow \neg q, r \rightarrow q\} \vdash \neg(p \wedge r).$$

Ejercicio 2: (12 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para verificar la validez del razonamiento anterior.

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (\neg p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge r))) \rightarrow (\neg p \wedge r).$$

- a) (6 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ .
- b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ .
- c) (4 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ , $FNC(\varphi)$.

Ejercicio 4: (10 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza las siguientes frases. En cada caso, define explícitamente el dominio y los elementos básicos de la formalización.

- a) Ningún abrigo es impermeable a menos que haya sido especialmente tratado.
- b) Algunas frutas y verduras son nutritivas.
- c) En toda pareja de vecinos hay algún envidioso.
- d) Hay algunas personas importantes que son conocidas por todos.
- e) No hay ninguna persona importante que Luis no conozca.

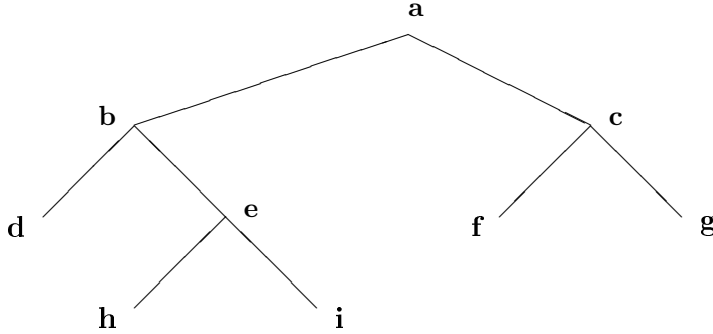


Figura 11.1: Figura del ejercicio 6

Ejercicio 5: (12 puntos) Usa el principio de recursión estructural para definir la función

$$f : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\},$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia el número $f(\varphi)$ de cuantificadores (existenciales o universales) que aparecen en φ .

Ejercicio 6: (12 puntos) En un árbol con raíz finito y etiquetado por las letras del dominio

$$D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\},$$

considera los siguientes predicados:

$P(x)$: el vértice x tiene un padre,

$H(x)$: el vértice x tiene hijos,

$C(x, y)$: el vértice x está conectado por medio de un camino no dirigido con el vértice y ,

$D(x, y)$: el vértice y es un descendiente del vértice x .

Evalúa las siguientes fórmulas en la interpretación definida por el árbol de la figura 11.1, que tiene como raíz el vértice a :

$$\varphi_1 : \forall x P(x),$$

$$\varphi_2 : \forall x H(x),$$

$$\varphi_3 : \exists x \forall y D(x, y),$$

$$\varphi_4 : \forall x \exists y D(x, y),$$

$$\varphi_5 : \forall x \forall y C(x, y),$$

$$\varphi_6 : \forall x (H(x) \rightarrow P(x)).$$

Ejercicio 7: (12 puntos) En cada apartado demuestra que las fórmulas φ_1 y φ_2 no son lógicamente equivalentes:

$$\text{a) } \varphi_1 : P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \quad \text{y} \quad \varphi_2 : \forall x (P(x) \wedge Q(x)),$$

$$\text{b) } \varphi_1 : P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \quad \text{y} \quad \varphi_2 : \exists x (P(x) \wedge Q(x)).$$

Ejercicio 8: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, verifica la validez de la regla de la disyunción:

$$\exists x (\varphi(x) \vee \psi(x)) \vdash \exists x \varphi(x) \vee \exists x \psi(x).$$

11.4 Examen final B de febrero 2005-2006

Fecha: 1 de febrero de 2006 **Tiempo:** 3 horas

El examen está formado por ocho problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra por reducción al absurdo la validez de la siguiente deducción:

$$\{q \rightarrow \neg s, p \rightarrow s\} \vdash \neg(q \wedge p).$$

Ejercicio 2: (12 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para verificar la validez del razonamiento anterior.

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (\neg r \rightarrow (p \rightarrow (r \wedge q))) \rightarrow (\neg r \wedge q).$$

- a) (6 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ .
- b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ .
- c) (4 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ , $FNC(\varphi)$.

Ejercicio 4: (10 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza las siguientes frases. En cada caso, define explícitamente el dominio y los elementos básicos de tu formalización.

- a) Ningún abrigo es impermeable a menos que haya sido especialmente tratado.
- b) Algunas frutas y verduras son nutritivas.
- c) En toda pareja de vecinos hay algún envidioso.
- d) Hay algunas personas importantes que son conocidas por todos.
- e) No hay ninguna persona importante que Luis no conozca.

Ejercicio 5: (12 puntos) Usa el principio de recursión estructural para definir la función

$$f : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\},$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia el número $f(\varphi)$ de cuantificadores (existenciales o universales) que aparecen en φ .

Ejercicio 6: (12 puntos) En un árbol con raíz finito y etiquetado por las letras del dominio

$$D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\},$$

considera los siguientes predicados:

$P(x)$: el vértice x tiene un padre,

$H(x)$: el vértice x tiene hijos,

$C(x, y)$: el vértice x está conectado por medio de un camino no dirigido con el vértice y ,

$D(x, y)$: el vértice y es un descendiente del vértice x .

Evalúa las siguientes fórmulas en la interpretación definida por el árbol de la figura 11.1, que tiene como raíz el vértice a :

$$\varphi_1 : \exists x P(x),$$

$$\varphi_2 : \exists x \neg H(x),$$

$$\varphi_3 : \forall x \exists y D(x, y),$$

$$\varphi_4 : \forall x \exists y \neg C(x, y),$$

$$\varphi_5 : \exists x (\neg H(x) \wedge P(x)).$$

Ejercicio 7: (12 puntos) En cada apartado demuestra que las fórmulas φ_1 y φ_2 no son lógicamente equivalentes:

$$a) \varphi_1 : \forall x (P(x) \wedge Q(x)) \quad \text{y} \quad \varphi_2 : P(x) \rightarrow \forall x Q(x),$$

$$b) \varphi_1 : \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \quad \text{y} \quad \varphi_2 : P(x) \rightarrow \exists x Q(x).$$

Ejercicio 8: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, verifica la validez de la regla de la disyunción:

$$\exists x \varphi(x) \vee \exists x \psi(x) \vdash \exists x (\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

11.5 Soluciones de los exámenes finales A y B de febrero 2005-2006

Fecha: 1 de febrero de 2006 **Tiempo:** 3 horas

Ejercicio 1 A: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra por reducción al absurdo la validez de la siguiente deducción:

$$\{p \rightarrow \neg q, r \rightarrow q\} \vdash \neg(p \wedge r).$$

Solución: para trabajar por reducción al absurdo, suponemos el conjunto

$$\{p \rightarrow \neg q, r \rightarrow q, \neg\neg(p \wedge r)\}$$

satisfacible y llegamos a una contradicción:

- 1) $p \rightarrow \neg q$ (Premisa)
- 2) $r \rightarrow q$ (Premisa)
- 3) $\neg\neg(p \wedge r)$ (Premisa)
- 4) $\vdash p \wedge r$ (E $\neg$ (3))
- 5) $\vdash p$ (E $\wedge$ (4))
- 6) $\vdash r$ (E $\wedge$ (4))
- 7) $\vdash \neg q$ (E $\rightarrow$ (5, 1))
- 8) $\vdash q$ (E $\rightarrow$ (6, 2))
- 9) $\vdash \neg q \wedge q$ (I $\wedge$ (7, 8))

Por tanto la deducción dada es válida por reducción al absurdo.

Ejercicio 1 B: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra por reducción al absurdo la validez de la siguiente deducción:

$$\{q \rightarrow \neg s, p \rightarrow s\} \vdash \neg(q \wedge p).$$

Solución: La solución es la misma que en el ejercicio 1 A, pero ahora p es q, q es s y r es p.

Ejercicio 2 A: (12 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para verificar la validez del razonamiento del ejercicio 1 A.

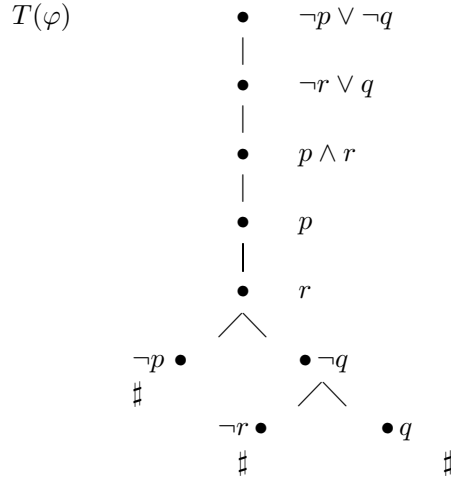
Solución: Siendo

$$\begin{aligned} p \rightarrow \neg q &\equiv \neg p \vee \neg q \\ p \rightarrow s &\equiv \neg r \vee q \\ \neg\neg(p \wedge r) &\equiv p \wedge r, \end{aligned}$$

consideremos el conjunto de fórmulas

$$\Phi = \{\neg p \vee \neg q, \neg r \vee q, p \wedge r\}.$$

El tableau asociado acabado es cerrado:



Se sigue que Φ es insatisfacible y que el razonamiento dado es válido

Ejercicio 2 B: (12 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para verificar la validez del razonamiento del ejercicio 1 B.

Solución: La solución es la misma que en el ejercicio 2 A, pero ahora p es q, q es s y r es p.

Ejercicio 3 A: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (\neg p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge r))) \rightarrow (\neg p \wedge r).$$

- (6 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ .
- (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ .
- (4 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ , $FNC(\varphi)$.

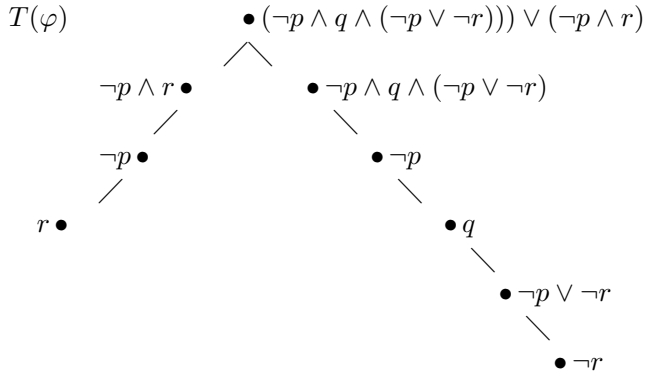
Solución:

a)

$$\begin{aligned}
 (\neg p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge r))) \rightarrow (\neg p \wedge r) &\equiv \neg(\neg p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge r))) \vee (\neg p \wedge r) \equiv \\
 &\equiv \neg(\neg\neg p \vee (q \rightarrow (p \wedge r))) \vee (\neg p \wedge r) \equiv \neg(p \vee (\neg q \vee (p \wedge r))) \vee (\neg p \wedge r) \equiv \\
 &\equiv (\neg p \wedge \neg(\neg q \vee (p \wedge r))) \vee (\neg p \wedge r) \equiv (\neg p \wedge (\neg\neg q \wedge \neg(p \wedge r))) \vee (\neg p \wedge r) \equiv
 \end{aligned}$$

$$\equiv (\neg p \wedge q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee (\neg p \wedge r).$$

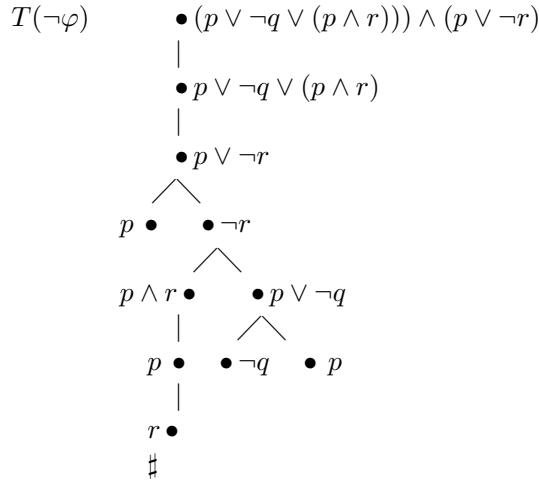
El tableaux completo asociado a φ tiene ramas abiertas:



Por tanto φ es satisfacible. Ahora tenemos que verificar si $\neg\varphi$ es una contradicción.

$$\begin{aligned} \neg\varphi &\equiv \neg(\neg p \wedge q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee (\neg p \wedge r) \equiv (\neg\neg p \vee \neg q \vee \neg(\neg p \vee \neg r)) \wedge \neg(\neg p \wedge r) \equiv \\ &\equiv (p \vee \neg q \vee (\neg\neg p \wedge \neg\neg r)) \wedge (\neg\neg p \vee \neg r) \equiv (p \vee \neg q \vee (p \wedge r)) \wedge (p \vee \neg r). \end{aligned}$$

También el tableaux completo asociado a $\neg\varphi$ tiene ramas abiertas:



Se sigue que φ es una contingencia.

b) Del tableaux $T(\varphi)$ deducimos que la valoración

$$r : 1, p : 0, q : 0$$

es un modelo de φ .

Del tableaux $T(\neg\varphi)$ deducimos que la valoración

$$r : 0, p : 1, q : 0$$

es un contraejemplo de φ .

c) Sabemos que $FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi)$.

Del tableaux $T(\neg\varphi)$ obtenemos que

$$FND(\neg\varphi) = p \vee (\neg r \wedge p) \vee (\neg q \wedge \neg r).$$

Entonces,

$$FNC(\varphi) = \neg(p \vee (\neg r \wedge p) \vee (\neg q \wedge \neg r)) \equiv \neg p \wedge (r \vee \neg p) \wedge (q \vee r).$$

Ejercicio 3 B: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (\neg r \rightarrow (p \rightarrow (r \wedge q))) \rightarrow (\neg r \wedge q).$$

- a) (6 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ .
- b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ .
- c) (4 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ , $FNC(\varphi)$.

Solución: La solución es la misma que en el ejercicio 3 A, pero ahora p es r , q es p y r es q .

Ejercicio 4 A y B: (10 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza las siguientes frases. En cada caso, define explícitamente el dominio y los elementos básicos de la formalización.

- a) Ningún abrigo es impermeable a menos que haya sido especialmente tratado.
- b) Algunas frutas y verduras son nutritivas.
- c) En toda pareja de vecinos hay algún envidioso.
- d) Hay algunas personas importantes que son conocidas por todos.
- e) No hay ninguna persona importante que Luis no conozca.

Solución:

a) $D = \text{los abrigos}$; $I(x) : x \text{ es impermeable}$; $T(x) : x \text{ ha sido especialmente tratado}$.

$$\forall x(I(x) \rightarrow T(x)).$$

b) $D = \text{los vegetales}$; $F(x) : x \text{ es una fruta}$; $V(x) : x \text{ es una verdura}$; $N(x) : x \text{ es nutritiva}$.

$$\exists x(F(x) \wedge N(x)) \wedge \exists x(V(x) \wedge N(x)).$$

c) $D = \text{las personas}$; $P(x, y) : x \text{ es un vecino de } y$; $E(x) : x \text{ es envidioso}$.

$$\forall x \forall y(P(x, y) \rightarrow E(x) \vee E(y)).$$

d) $D = \text{las personas}$; $I(x) : x \text{ es importante}$; $C(x, y) : x \text{ es una persona conocida por } y$.

$$\exists x(I(x) \wedge \forall y C(x, y)).$$

e) $D = \text{las personas}$; $I(x) : x \text{ es importante}$; $C(x, y) : x \text{ es conocida por } y$; $L : \text{Luis}$.

$$\begin{aligned} \neg \exists x(I(x) \wedge \neg C(x, L)) &\equiv \forall x(\neg I(x) \vee \neg \neg C(x, L)) \equiv \\ &\equiv \forall x(\neg I(x) \vee C(x, L)) \equiv \forall x(I(x) \rightarrow C(x, L)). \end{aligned}$$

Ejercicio 5 A y B: (12 puntos) Usa el principio de recursión estructural para definir la función

$$f : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\},$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia el número $f(\varphi)$ de cuantificadores (existenciales o universales) que aparecen en φ .

Solución:**Base (FAt):**

$$\begin{aligned} f(\top) &= f(\perp) = f(p) = 0, \\ f(s = t) &= f(s) + f(t) = 0 + 0 = 0, \\ f(P(t_1, t_2, \dots, t_n)) &= f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_n) = 0. \end{aligned}$$

Paso recursivo:

$$\begin{aligned} (F\neg) : f(\neg\varphi) &= f(\varphi), \\ (F\circ) : f(\varphi_1 \circ \varphi_2) &= f(\varphi_1) + f(\varphi_2), \\ (F\forall\exists) : f(\forall\varphi) &= f(\exists\varphi) = f(\varphi) + 1. \end{aligned}$$

Estas definiciones determinan la función f sobre todo F .

Ejercicio 6 A: (12 puntos) En un árbol con raíz finito y etiquetado por las letras del dominio

$$D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\},$$

considera los siguientes predicados:

$P(x)$: el vértice x tiene un padre,

$H(x)$: el vértice x tiene hijos,

$C(x, y)$: el vértice x está conectado por medio de un camino no dirigido con el vértice y ,

$D(x, y)$: el vértice y es un descendiente del vértice x .

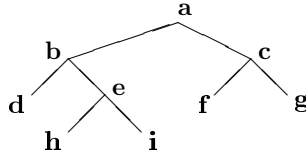


Figura 11.2: Figura de los ejercicios 6, A y B

Evalúa las siguientes fórmulas en la interpretación definida por el árbol de la figura 11.2, que tiene como raíz el vértice a :

$$\varphi_1 : \forall x P(x),$$

$$\varphi_2 : \forall x H(x),$$

$$\varphi_3 : \exists x \forall y D(x, y),$$

$$\varphi_4 : \forall x \exists y D(x, y),$$

$$\varphi_5 : \forall x \forall y C(x, y),$$

$$\varphi_6 : \forall x (H(x) \rightarrow P(x)).$$

Solución:

- $\varphi_1^I : 0$ ya que $P^I(a) : 0$;
- $\varphi_2^I : 0$ ya que $H^I(d) : 0$;
- $\varphi_3^I : 0$ ya que $(\forall y D(x, y))^I : 0$, siendo $D^I(x, a) : 0$ para cualquier valor de x ;
- $\varphi_4^I : 0$ ya que $(\exists y D(d, y))^I : 0$;
- $\varphi_5^I : 1$ ya que el árbol es un grafo conexo;
- $\varphi_6^I : 0$ ya que $(H(a) \rightarrow P(a))^I : 0$.

Ejercicio 6 B: (12 puntos) En un árbol con raíz finito y etiquetado por las letras del dominio

$$D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\},$$

considera los siguientes predicados:

$P(x)$: el vértice x tiene un padre,

$H(x)$: el vértice x tiene hijos,

$C(x, y)$: el vértice x está conectado por medio de un camino no dirigido con el vértice y ,

$D(x, y)$: el vértice y es un descendiente del vértice x .

Evalúa las siguientes fórmulas en la interpretación definida por el árbol de la figura 11.2, que tiene como raíz el vértice a :

$$\varphi_1 : \exists x P(x),$$

$$\varphi_2 : \exists x \neg H(x),$$

$$\varphi_3 : \forall x \exists y D(x, y),$$

$$\varphi_4 : \forall x \exists y \neg C(x, y),$$

$$\varphi_5 : \exists x (\neg H(x) \wedge P(x)).$$

Solución:

- $\varphi_1^I : 1$ ya que $P^I(b) : 1$;
- $\varphi_2^I : 1$ ya que $\neg H^I(d) : 1$;
- $\varphi_3^I : 0$ ya que $(\exists y D(d, y))^I : 0$, siendo d una hoja del árbol;
- $\varphi_4^I : 0$ ya que $(\exists y \neg C(x, y))^I : 0$, siendo siempre $(\neg C(x, y))^I : 0$ en un grafo conexo;
- $\varphi_5^I : 1$ ya que $(\neg H(d) \wedge P(d))^I : 1$.

Ejercicio 7 A: (12 puntos) En cada apartado demuestra que las fórmulas φ_1 y φ_2 no son lógicamente equivalentes:

a) $\varphi_1 : P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$ y $\varphi_2 : \forall x (P(x) \wedge Q(x))$,

b) $\varphi_1 : P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$ y $\varphi_2 : \exists x (P(x) \wedge Q(x))$.

Solución:

a) Sean D cualquiera y $I : P^I = \emptyset$ (el conjunto vacío). Entonces φ_1 es siempre verdadera y φ_2 es siempre falsa.

b) Como antes, sean D cualquiera y $I : P^I = \emptyset$ (el conjunto vacío). Entonces φ_1 es siempre verdadera y φ_2 es siempre falsa.

Ejercicio 7 B: (12 puntos) En cada apartado demuestra que las fórmulas φ_1 y φ_2 no son lógicamente equivalentes:

$$\text{a) } \varphi_1 : \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \quad \text{y} \quad \varphi_2 : P(x) \rightarrow \forall xQ(x),$$

$$\text{b) } \varphi_1 : \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \quad \text{y} \quad \varphi_2 : P(x) \rightarrow \exists xQ(x).$$

Solución: Intercambiando φ_1 y φ_2 , la solución es la misma que en el ejercicio 7 A.

Ejercicio 8 A: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, verifica la validez de la regla de la disyunción:

$$\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x).$$

Solución:

$$1) \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \quad (\text{Premisa})$$

$$2) \varphi(x_1) \vee \psi(x_1) \quad (\text{Premisa auxiliar})$$

$$3) \varphi(x_1) \quad (\text{Premisa auxiliar})$$

$$4) \vdash \exists x\varphi(x) \quad (I\exists(3))$$

$$5) \vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x) \quad (I \vee (4))$$

$$6) \psi(x_1) \quad (\text{Premisa auxiliar})$$

$$7) \vdash \exists x\psi(x) \quad (I\exists(6))$$

$$8) \vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x) \quad (I \vee (7))$$

$$9) \vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x) \quad (E \vee (2, (3, 8)))$$

$$10) \vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x) \quad (E\exists(1, (2, 9)))$$

Ejercicio 8 B: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, verifica la validez de la regla de la disyunción:

$$\exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

Solución:

$$1) \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x) \quad (\text{Premisa})$$

$$2) \exists x\varphi(x) \quad (\text{Premisa auxiliar})$$

$$3) \varphi(x_1) \quad (\text{Premisa auxiliar})$$

$$4) \vdash \varphi(x_1) \vee \psi(x_1) \quad (I \vee (3))$$

$$5) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \quad (I\exists(4))$$

$$6) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \quad (E\exists(2, (3, 5)))$$

$$7) \exists x\psi(x) \quad (\text{Premisa auxiliar})$$

$$8) \psi(x_1) \quad (\text{Premisa auxiliar})$$

$$9) \vdash \varphi(x_1) \vee \psi(x_1) \quad (I \vee (8))$$

$$10) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \quad (I\exists(9))$$

$$11) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \quad (E\exists(7, (8, 10)))$$

$$12) \vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \quad (E \vee (1, (2, 11)))$$

11.6 Examen final de septiembre 2005-2006

Fecha: 8 de septiembre de 2006

Tiempo: 3 horas

El examen está formado por ocho problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez del siguiente teorema:

$$\vdash (p \rightarrow (r \rightarrow q)) \wedge (\neg s \vee p) \wedge r \rightarrow (s \rightarrow q).$$

Ejercicio 2: (12 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para estudiar la validez del teorema del ejercicio 1.

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : p \vee (r \rightarrow q) \vee (\neg s \wedge p) \rightarrow r.$$

- a) (6 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ .
- b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ .
- c) (4 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ , $FNC(\varphi)$.

Ejercicio 4: (10 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza el siguiente razonamiento, tomando como dominio “los animales”.

- (P1) Ningún plantígrado es un reptil.
- (P2) Los animales van a beber al río a menos que sean plantígrados.
- (P3) No todos los animales son plantígrados.
- (C) No hay animales que vayan a beber al río.

Ejercicio 5: (12 puntos) Usando el principio de recursión estructural y la función profundidad de un término pf , define la función:

$$PF : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\},$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia la longitud $PF(\varphi)$ de la rama más larga de su árbol estructural (su profundidad).

Ejercicio 6: Evalúa las siguientes fórmulas en las interpretaciones dadas:

a) (6 puntos)

$$\varphi_1 : \forall x \neg P(x) \rightarrow \exists y (\neg Q(y) \wedge R(y)),$$

en la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que

$$D = \{a, b\}, \quad P^I = \emptyset, \quad Q^I = \{a\} \quad \text{y} \quad R^I = \{a\}.$$

b) (6 puntos)

$$\varphi_2 : \forall x (T(x) \rightarrow \forall y R(x, y)),$$

en la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que

$$D = \{a, b\}, \quad T^I = \{a\} \quad \text{y} \quad R^I = \{(a, a), (a, b), (b, a)\}.$$

Ejercicio 7: (12 puntos) En cada apartado, define una interpretación tal que la fórmula dada sea verdadera y una tal que no lo sea:

a) $\varphi_1 : \forall x (P(x) \wedge \exists y Q(x, y)),$

b) $\varphi_2 : \exists x (P(x) \wedge \forall y Q(x, y)).$

Ejercicio 8: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, verifica la validez de la regla de la implicación:

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists x \psi(x) \vdash \exists x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)).$$

Sugerencia: usa la regla de interdefinición y la deducción

$$\vdash \neg \exists x \varphi(x) \rightarrow \forall x \neg \varphi(x).$$

11.7 Soluciones del examen final de septiembre 2005-2006

Fecha: 8 de septiembre de 2006 Tiempo: 3 horas

Ejercicio 1: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez del siguiente teorema:

$$\vdash (p \rightarrow (r \rightarrow q)) \wedge (\neg s \vee p) \wedge r \rightarrow (s \rightarrow q).$$

Solución: por el teorema de la deducción, podemos reescribir el teorema en forma de deducción:

$$\{p \rightarrow (r \rightarrow q), \neg s \vee p, r, s\} \vdash q.$$

Una posible demostración del teorema es:

- 1) $p \rightarrow (r \rightarrow q)$ (Premisa)
- 2) $\neg s \vee p$ (Premisa)
- 3) r (Premisa)
- 4) s (Premisa)
- 5) $\vdash p$ (Tollendo Ponens (2,4))
- 6) $\vdash r \rightarrow q$ (E $\rightarrow$ (5, 1))
- 7) $\vdash q$ (E $\rightarrow$ (3, 6))

Ejercicio 2: (12 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para estudiar la validez del teorema del ejercicio 1.

Solución:

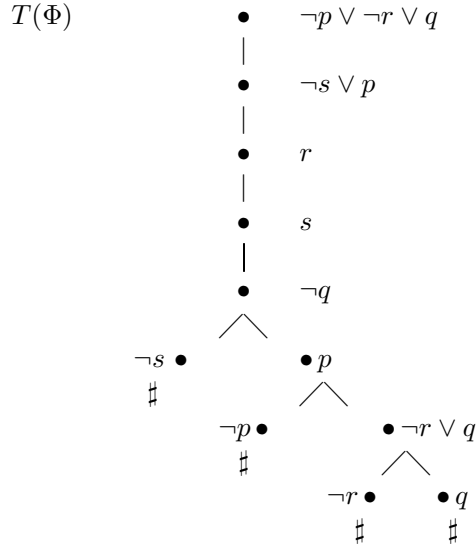
Siendo

$$p \rightarrow (r \rightarrow q) \equiv \neg p \vee (\neg r \vee q) \equiv \neg p \vee \neg r \vee q,$$

consideremos el conjunto de fórmulas

$$\Phi = \{\neg p \vee \neg r \vee q, \neg s \vee p, r, s, \neg q\}.$$

El tableaux asociado acabado es cerrado:



Se sigue que Φ es insatisfacible y que el razonamiento dado es válido

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : p \vee (r \rightarrow q) \vee (\neg s \wedge p) \rightarrow r.$$

- (6 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ .
- (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ .
- (4 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ , $FNC(\varphi)$.

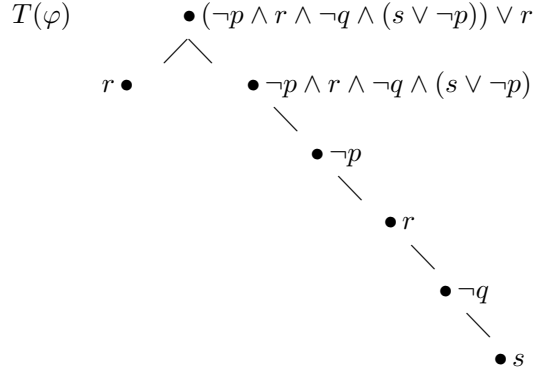
Solución:

a)

$$\varphi \equiv \neg(p \vee (r \rightarrow q) \vee (\neg s \wedge p)) \vee r \equiv (\neg p \wedge \neg(\neg r \vee q) \wedge \neg(\neg s \wedge p)) \vee r \equiv$$

$$\equiv (\neg p \wedge r \wedge \neg q \wedge (s \vee \neg p)) \vee r.$$

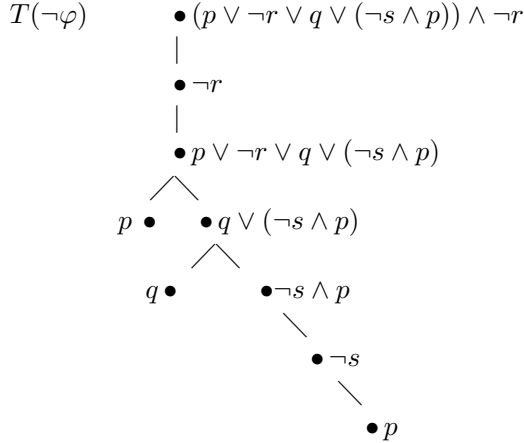
El tableaux completo asociado a φ tiene ramas abiertas:



Por tanto φ es satisfacible. Ahora tenemos que verificar si $\neg\varphi$ es una contradicción.

$$\neg\varphi \equiv (p \vee \neg r \vee q \vee (\neg s \wedge p)) \wedge \neg r.$$

También el tableaux completo asociado a $\neg\varphi$ tiene ramas abiertas:



$\neg\varphi$ es satisfacible y, por tanto, φ es una contingencia.

b) Del tableaux $T(\varphi)$ deducimos que la valoración

$$r : 1, s : 1, q : 0, p : 0$$

es un modelo de φ .

Del tableaux $T(\neg\varphi)$ deducimos que la valoración

$$r : 0, s : 0, q : 1, p : 1$$

es un contraejemplo de φ .

c) Sabemos que $FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi)$.

Del tableaux $T(\neg\varphi)$ obtenemos que

$$FND(\neg\varphi) = (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg s \wedge \neg r).$$

Entonces,

$$FNC(\varphi) = \neg((p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg s \wedge \neg r)) \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee s \vee r).$$

Ejercicio 4: (10 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza el siguiente razonamiento, tomando como dominio “los animales”.

(P1) Ningún plantígrado es un reptil.

(P2) Los animales van a beber al río a menos que sean plantígrados.

(P3) No todos los animales son plantígrados.

(C) No hay animales que vayan a beber al río.

Solución:

Dominio: los animales.

Predicados:

$P(x)$: x es un plantígrado,

$R(x)$: x es un reptil,

$B(x)$: x va a beber al río.

La frase (P2) se puede leer como “Los animales no van a beber al río sólo si son plantígrados,” así que la formalización del razonamiento puede ser la siguiente:

$$(P1) \forall x [P(x) \rightarrow \neg R(x)]$$

$$(P2) \forall x [\neg B(x) \rightarrow P(x)] \quad (\forall x (B(x) \vee P(x)), \forall x [\neg P(x) \rightarrow B(x)])$$

$$(P3) \exists x \neg P(x)$$

$$(C) \forall x \neg B(x)$$

Ejercicio 5: (12 puntos) Usando el principio de recursión estructural y la función profundidad de un término pf , define la función:

$$PF : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\},$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia la longitud $PF(\varphi)$ de la rama más larga de su árbol estructural (su profundidad).

Solución:

Sea $pf(t)$ la función profundidad de un término.

La función profundidad de una fórmula se puede definir usando el principio de recursión estructural y la función $pf(t)$:

Base (FAt):

$$PF(\top) = PF(\perp) = PF(p) = 0,$$

$$PF(s = t) = \max\{pf(s), pf(t)\} + 1,$$

$$PF(P(t_1, t_2, \dots, t_n)) = \max\{pf(t_1), pf(t_2), \dots, pf(t_n)\} + 1.$$

Paso recursivo:

$$(F\neg) : PF(\neg\varphi) = PF(\varphi) + 1,$$

$$(F\circ) : PF(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \max\{PF(\varphi_1), PF(\varphi_2)\} + 1,$$

$$(F\forall\exists) : PF(\forall\varphi) = PF(\exists\varphi) = PF(\varphi) + 1.$$

Estas definiciones determinan la función PF sobre todo F .

Ejercicio 6: Evalúa las siguientes fórmulas en las interpretaciones dadas:

a) (6 puntos)

$$\varphi_1 : \forall x \neg P(x) \rightarrow \exists y (\neg Q(y) \wedge R(y)),$$

en la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que

$$D = \{a, b\}, \quad P^I = \emptyset, \quad Q^I = \{a\} \quad \text{y} \quad R^I = \{a\}.$$

b) (6 puntos)

$$\varphi_2 : \forall x (T(x) \rightarrow \forall y R(x, y)),$$

en la interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que

$$D = \{a, b\}, \quad T^I = \{a\} \quad \text{y} \quad R^I = \{(a, a), (a, b), (b, a)\}.$$

Solución:

a) $(\forall x \neg P(x))^I = 1$, ya que $\neg P^I(a) = \neg P^I(b) = 1$,

$(\exists y (\neg Q(y) \wedge R(y)))^I = 0$, ya que

$\neg Q^I(a) \wedge R^I(a) = 0$, siendo $\neg Q^I(a) = 0$ y

$\neg Q^I(b) \wedge R^I(b) = 0$, siendo $R^I(b) = 0$

Se sigue que $\varphi_1^I = 0$, es decir, es falsa en la interpretación dada.

b) $(T(a) \rightarrow \forall y R(a, y))^I = 1$ ya que

$T^I(a) = 1$ y

$(\forall y R(a, y))^I = 1$, siendo $R^I(a, a) = R^I(a, b) = 1$.

$(T(b) \rightarrow \forall y R(b, y))^I = 1$ ya que

$$T^I(b) = 0.$$

Se sigue que $\varphi_2^I = 1$, es decir, es verdadera en la interpretación dada.

Ejercicio 7: (12 puntos) En cada apartado, define una interpretación tal que la fórmula dada sea verdadera y una tal que no lo sea:

a) $\varphi_1 : \forall x(P(x) \wedge \exists y Q(x, y))$,

b) $\varphi_2 : \exists x(P(x) \wedge \forall y Q(x, y))$.

Solución:

a) Sea $\mathbb{I} = (D, I)$ definida por

$$D = \{a, b\}, \quad P = \{a, b\}, \quad Q = \{(a, a), (b, a)\}.$$

Entonces,

si $x = a$: $P^I(a) \wedge (\exists y Q(a, y))^I = 1$, ya que
 $P^I(a) = (\exists y Q(a, y))^I = 1$ siendo $Q(a, a)^I = 1$,

si $x = b$: $P^I(b) \wedge (\exists y Q(b, y))^I = 1$, ya que
 $P^I(b) = (\exists y Q(b, y))^I = 1$ siendo $Q(b, a)^I = 1$,

Se sigue que $\varphi_1^I = 1$, es decir, es verdadera en la interpretación dada.

Sea ahora $\mathbb{I} = (D, I)$ definida por

$$D = \{a, b\}, \quad P = \{a\}, \quad Q \text{ cualquiera.}$$

En este caso $\varphi_1^I = 0$, ya que $P^I(b) = 0$.

b) Sea $\mathbb{I} = (D, I)$ definida por

$$D = \{a, b\}, \quad P = \{a\}, \quad Q = \{(a, a), (a, b)\}.$$

Entonces $\varphi_2^I = 1$, ya que

$$P^I(a) = (\forall y Q(a, y))^I = 1 \text{ siendo } Q(a, a)^I = Q(a, b)^I = 1.$$

Sea ahora $\mathbb{I} = (D, I)$ definida por

$$D = \{a, b\}, \quad P = \{a\}, \quad Q = \{(a, a)\}.$$

En este caso $\varphi_2^I = 0$, ya que

si $x = a$: $P^I(a) = 1$, $(\forall y Q(a, y))^I = 0$ siendo $Q(a, b)^I = 0$ y

si $x = b$: $P^I(b) = 0$.

Ejercicio 8: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, verifica la validez de la regla T36.1 de la implicación:

$$\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)).$$

Sugerencia: usa la regla de interdefinición y la deducción

$$\vdash \neg\exists x\varphi(x) \rightarrow \forall x\neg\varphi(x).$$

Solución:

- 1) $\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists x\psi(x)$ (Premisa)
- 2) $\neg\exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x)$ (Int.(1))

- 3) $\neg\exists x\varphi(x)$ (Premisa auxiliar)
- 4) $\vdash \forall x\neg\varphi(x)$ ($\vdash \neg\exists x\varphi(x) \rightarrow \forall x\neg\varphi(x)$)
- 5) $\vdash \neg\varphi(a)$ ($E\forall(4)$)
- 6) $\vdash \neg\varphi(a) \vee \psi(a)$ ($I \vee (5)$)
- 7) $\vdash \varphi(a) \rightarrow \psi(a)$ (Int.(6))

- 8) $\exists x\psi(x)$ (Premisa auxiliar)

- 9) $\psi(a)$ (Premisa auxiliar)
- 10) $\vdash \neg\varphi(a) \vee \psi(a)$ ($I \vee (9)$)
- 11) $\vdash \varphi(a) \rightarrow \psi(a)$ (Int.(10))

- 12) $\vdash \exists x\psi(x) \rightarrow (\varphi(a) \rightarrow \psi(a))$ ($E\exists(8, (9, 11))$)

- 13) $\vdash \varphi(a) \rightarrow \psi(a)$ ($E \vee (2, (3, 12))$)
- 14) $\vdash \exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ ($I\exists(13)$)

11.8 Examen final de febrero 2006-2007

Fecha: 9 de febrero de 2007 **Tiempo:** 3 horas

El examen está formado por siete problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1: (6 puntos) Para cada apartado, contesta verdadero o falso (no hace falta justificar tus repuestas):

En la lógica proposicional:

LP1) Toda fórmula proposicional satisfacible admite al menos un modelo.

LP2) La deducción $\{p, q\} \rightarrow r$ es válida si y sólo si la fórmula $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ lo es.

LP3) La expresión $p \wedge q \vee r \wedge s$ es una fórmula proposicional escrita en forma abreviada.

En la lógica de primer orden:

LPO1) $\forall x P(x) \wedge \exists y \neg P(y)$ es una fórmula insatisfacible.

LPO2) $\forall x P(x)$ y $\neg(\exists x P(x))$ son fórmulas equivalentes.

LPO3) Dada una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ de la fórmula $\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow Q(y))$, es correcto definir una asignación A tal que $x^A = a \in D$.

Ejercicio 2: Considera el conjunto $\Sigma = \{p, q, r, s, t, u, v, z\}$ y su conjunto de las partes $P(\Sigma)$.

a) (10 puntos) Usa el principio de recursión estructural para definir la función

$$f : F \longrightarrow P(\Sigma),$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica proposicional le asocia el conjunto de proposiciones atómicas de Σ que aparecen en la signatura de φ .

b) (8 puntos) Usa inducción estructural para verificar que, para toda $\varphi \in F$, se verifica que el número de elementos de $f(\varphi)$ es menor o igual que 8.

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q \rightarrow p \wedge q).$$

a) (10 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ .

b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ .

c) (6 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ , $FNC(\varphi)$.

Ejercicio 4: (8 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza las siguientes frases usando como dominio D el conjunto de las piezas de ajedrez y los predicados:

$T(x)$ = x es una torre, $C(x)$ = x es un caballo, $MD(x)$ = x se mueve en diagonal, $B(x)$ = x es blanca, $N(x)$ = x es negra, $CP(x,y)$ = x come a y , $A(x,y)$ = x está alineada con y .

- a) Ninguna torre se mueve en diagonal.
- b) Toda pieza se mueve en diagonal, salvo si es una torre o un caballo.
- c) Una pieza blanca sólo come piezas negras.
- d) Para que una torre coma un caballo es necesario que las dos piezas estén alineadas.

Ejercicio 5: Considera la red de seis ordenadores de la figura 11.3.

En el dominio

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

de los seis ordenadores, considera los siguientes predicados:

$P(x)$: x es par,

$C(x, y)$: x está directamente conectado (a distancia 1) con y (x y y distintos),

$D(x, y, z)$: x está directamente conectado con y y con z (x , y y z todos distintos),

a) (9 puntos) Define la interpretación con dominio D determinada por la red de la figura 11.3.

b) (15 puntos) Evalúa las siguientes seis fórmulas en la interpretación del apartado a:

$$\varphi_1 : \forall x \exists y (P(x) \wedge \neg P(y) \wedge C(x, y)),$$

$$\varphi_2 : \exists x \forall y (P(x) \wedge \neg P(y) \wedge C(x, y)),$$

$$\varphi_3 : \forall x \exists y C(x, y),$$

$$\varphi_4 : \forall x \forall y \exists z D(x, y, z),$$

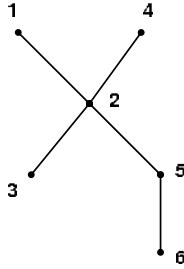


Figura 11.3: Grafo de la red de ordenadores del ejercicio 5

$$\varphi_5 : \exists x \forall y \forall z D(x, y, z),$$

$$\varphi_6 : \exists x \forall y (P(x) \wedge \neg P(y) \rightarrow C(x, y)).$$

Ejercicio 6: (10 puntos) Verifica si las fórmulas φ y ψ son lógicamente equivalentes:

$$\varphi : P(x) \leftrightarrow Q(x), \quad \psi : P(x) \vee Q(x) \leftrightarrow P(x) \wedge Q(x).$$

Ejercicio 7: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, demuestra la validez de la deducción:

$$\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(P(x) \wedge R(x))\} \vdash \exists x(Q(x) \wedge R(x)).$$

11.9 Soluciones del examen final de febrero 2006-2007

Fecha: 9 de febrero de 2007 Tiempo: 3 horas

Ejercicio 1: (6 puntos) Para cada apartado, contesta verdadero o falso (no hace falta justificar tus repuestas):

En la lógica proposicional:

LP1) Toda fórmula proposicional satisfacible admite al menos un modelo.

LP2) La deducción $\{p, q\} \rightarrow r$ es válida si y sólo si la fórmula $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ lo es.

LP3) La expresión $p \wedge q \vee r \wedge s$ es una fórmula proposicional escrita en forma abreviada.

En la lógica de primer orden:

LPO1) $\forall x P(x) \wedge \exists y \neg P(y)$ es una fórmula insatisfacible.

LPO2) $\forall x P(x)$ y $\neg(\exists x P(x))$ son fórmulas equivalentes.

LPO3) Dada una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ de la fórmula $\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow Q(y))$, es correcto definir una asignación A tal que $x^A = a \in D$.

Solución:

LP1) Verdadero por definición de fórmula satisfacible.

LP2) Verdadero por el teorema de la deducción.

LP3) Falso. Los conectivos $\wedge$ y $\vee$ tienen el mismo nivel de precedencia. Por tanto la fórmula sería ambigua.

LPO1) Verdadero, siendo $\exists y \neg P(y)$ la negación de $\forall x P(x)$.

LPO2) Falso ya que $\neg(\exists x P(x))$ es equivalente a $\forall x \neg P(x)$.

LPO3) Falso. La fórmula $\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow Q(y))$ no contiene variables libres.

Ejercicio 2: Considera el conjunto $\Sigma = \{p, q, r, s, t, u, v, z\}$ y su conjunto de las partes $P(\Sigma)$.

a) (10 puntos) Usa el principio de recursión estructural para definir la función

$$f : F \longrightarrow P(\Sigma),$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica proposicional le asocia el conjunto de proposiciones atómicas de Σ que aparecen en la signatura de φ .

b) (8 puntos) Usa inducción estructural para verificar que, para toda $\varphi \in F$, se verifica que el número de elementos de $f(\varphi)$ es menor o igual que 8.

Solución:

a)

$$f : F \longrightarrow P(\Sigma),$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica proposicional le asocia el conjunto de proposiciones atómicas de Σ que aparecen en la signatura de φ .

1. **Base (At):** $f(\top) = f(\perp) = \emptyset$, $f(p) = \{p\} \cap \Sigma$.

2. **Pasos recursivos:**

$$(\neg): f(\neg(\varphi)) = f(\varphi),$$

$$(\circ): f(\varphi \circ \psi) = (f(\varphi) \cup f(\psi)) \cap \Sigma, \text{ para todo conectivo binario } \circ \text{ y todo par de fórmulas } \varphi \text{ y } \psi.$$

Estas definiciones determinan la función f sobre todo F .

b) Dado un conjunto A , vamos a usar el símbolo $|A|$ para indicar el cardinal de A , es decir, el número de elementos de A .

Usando el principio de inducción estructural podemos probar que para toda fórmula φ se verifica que el número de elementos de $f(\varphi)$ es menor o igual que 8:

Base de inducción (At): $|f(\top)| = |f(\perp)| = 0 \leq 8$, $|f(p)| = |\{p\} \cap \Sigma| \leq 1 \leq 8$.

Pasos de inducción:

$$(\neg): \text{ Si } |f(\varphi)| \leq 8 \text{ para una fórmula cualquiera, entonces } |f(\neg\varphi)| = |f(\varphi)| \leq 8.$$

$$(\circ): \text{ Si } \varphi \text{ y } \psi \text{ son dos fórmulas tales que } |f(\varphi)| \leq 8 \text{ y } |f(\psi)| \leq 8, \text{ entonces } |f(\varphi \circ \psi)| = |(f(\varphi) \cup f(\psi)) \cap \Sigma| \leq |\Sigma| \leq 8.$$

Se sigue que, por el principio de inducción estructural, que para toda fórmula φ se verifica que el número de elementos de $f(\varphi)$ es menor o igual que 8.

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q \rightarrow p \wedge q).$$

a) (10 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ .

b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ .

c) (6 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ , $FNC(\varphi)$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \varphi : (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q \rightarrow p \wedge q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg(p \vee q) \vee (p \wedge q)) \equiv \\ &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q). \end{aligned}$$

$$\neg\varphi \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q).$$

Los tableaux completos de $\neg\varphi$ y φ tienen ramas abierta (ver figura 11.4). Se sigue que φ es una contingencia.

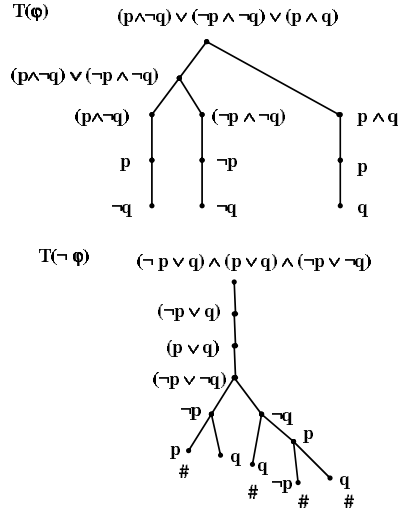


Figura 11.4: Tableaux de $\neg\varphi$ y φ .

b) Del tableau de φ se deduce que la valoración $\{p = 1, q = 0\}$ es un modelo de φ .

Del tableau de $\neg\varphi$ se deduce que la valoración $\{p = 0, q = 1\}$ es un contraejemplo de φ .

c) Mirando a la única rama abierta del tableau de $\neg\varphi$ se obtiene que:

$$FND(\neg\varphi) = \neg p \wedge q.$$

Entonces,

$$FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi) = p \vee \neg q.$$

Ejercicio 4: (8 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza las siguientes frases usando como dominio D el conjunto de las piezas de ajedrez y los predicados:

$T(x)$ = x es una torre, $C(x)$ = x es un caballo, $MD(x)$ = x se mueve en diagonal, $B(x)$ = x es blanca, $N(x)$ = x es negra, $CP(x,y)$ = x come a y , $A(x,y)$ = x está alineada con y .

a) Ninguna torre se mueve en diagonal.

b) Toda pieza se mueve en diagonal, salvo si es una torre o un caballo.

c) Una pieza blanca sólo come piezas negras.

d) Para que una torre coma un caballo es necesario que las dos piezas estén alineadas.

Solución:

a) $\forall x(T(x) \rightarrow \neg MD(x)) \equiv \neg \exists x(T(x) \wedge MD(x)) \equiv \forall x(\neg T(x) \vee \neg MD(x)).$

b) $\forall x(\neg MD(x) \rightarrow T(x) \vee C(x)) \equiv \forall x(MD(x) \vee T(x) \vee C(x)).$

c) $\forall x \forall y(B(x) \wedge CP(x, y) \rightarrow N(y)) \equiv \forall x \forall y(\neg B(x) \vee \neg CP(x, y) \vee N(y)).$

d) $\forall x \forall y(T(x) \wedge C(y) \wedge CP(x, y) \rightarrow A(x, y)) \equiv$
 $\equiv \forall x \forall y(\neg T(x) \vee \neg C(y) \vee \neg CP(x, y) \vee A(x, y)).$

Ejercicio 5: Considera la red de seis ordenadores de la figura 11.5.

En el dominio

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

de los seis ordenadores, considera los siguientes predicados:

$P(x) : x$ es par,

$C(x, y) : x$ está directamente conectado (a distancia 1) con y (x y y distintos),

$D(x, y, z) : x$ está directamente conectado con y y con z (x, y y z todos distintos),

a) (9 puntos) Define la interpretación con dominio D determinada por la red de la figura 11.5.

b) (15 puntos) Evalúa las siguientes seis fórmulas en la interpretación del apartado a:

$$\varphi_1 : \forall x \exists y(P(x) \wedge \neg P(y) \wedge C(x, y)),$$

$$\varphi_2 : \exists x \forall y(P(x) \wedge \neg P(y) \wedge C(x, y)),$$

$$\varphi_3 : \forall x \exists y C(x, y),$$

$$\varphi_4 : \forall x \forall y \exists z D(x, y, z),$$

$$\varphi_5 : \exists x \forall y \forall z D(x, y, z),$$

$$\varphi_6 : \exists x \forall y(P(x) \wedge \neg P(y) \rightarrow C(x, y)).$$

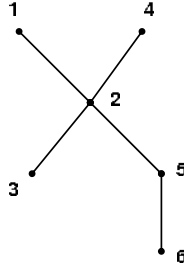


Figura 11.5: Grafo de la red de ordenadores del ejercicio 5

Solución:

a) La interpretación con dominio D determinada por la red de la figura 11.5 es $\mathbb{I} = (D, I)$, donde:

$$P^I = \{2, 4, 6\} \subset D,$$

$$C^I = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 3), (2, 3), (3, 2), (2, 5), (5, 2), (5, 6), (6, 5)\} \subset D \times D,$$

$$D^I = \{(2, 1, 4), (2, 4, 1), (2, 3, 5), (2, 5, 3), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (2, 4, 5), (2, 5, 4), \\ (2, 3, 4), (2, 4, 3), (2, 1, 5), (2, 5, 1), (5, 2, 6), (5, 6, 2)\} \subset D \times D \times D.$$

b)

$$(\varphi_1)^I = 0 \text{ ya que, por ejemplo, } (P(1))^I = 0.$$

$$(\varphi_2)^I = 0 \text{ ya que, para todo } x, (\forall y(P(x) \wedge \neg P(y) \wedge C(x, y)))^I = 0, \text{ siendo, por ejemplo, } (\neg P(3))^I = 0.$$

$$(\varphi_3)^I = 1 \text{ ya que el grafo de la red es conexo, es decir, todo ordenador está a distancia 1 de al menos otro ordenador.}$$

$$(\varphi_4)^I = 0 \text{ ya que, por ejemplo, para todo } z, (D(6, 5, z))^I = 0.$$

$$(\varphi_5)^I = 0 \text{ ya que, para todo } x, (D(x, 1, 6))^I = 0.$$

$(\varphi_6)^I = 1$ ya que $(\forall y(P(1) \wedge \neg P(y) \rightarrow C(1, y)))^I = 1$, siendo la premisa de la implicación siempre falsa.

Ejercicio 6: (10 puntos) Verifica si las fórmulas φ y ψ son lógicamente equivalentes:

$$\varphi : P(x) \leftrightarrow Q(x), \quad \psi : P(x) \vee Q(x) \leftrightarrow P(x) \wedge Q(x).$$

Solución:

Sean $\mathbb{I} = (D, I)$ y A una interpretación y una asignación cualesquiera. Los posibles casos se pueden representar en la siguiente tabla:

$(P(x))^{I,A}$	$(Q(x))^{I,A}$	$(\varphi)^{I,A}$	$(P(x) \vee Q(y))^{I,A}$	$(P(x) \wedge Q(y))^{I,A}$	$(\psi)^{I,A}$	$(\varphi \leftrightarrow \psi)^{I,A}$
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1

Se sigue que φ y ψ son equivalentes.

Ejercicio 7: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, demuestra la validez de la deducción:

$$\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(P(x) \wedge R(x))\} \vdash \exists x(Q(x) \wedge R(x)).$$

Solución:

- 1) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ (Premisa)
- 2) $\forall x(P(x) \wedge R(x))$ (Premisa)
- 3) $\vdash P(a) \rightarrow Q(a)$ ($E\forall(1)$)
- 4) $\vdash P(a) \wedge R(a)$ ($E\forall(2)$)
- 5) $\vdash P(a)$ ($E \wedge (4)$)
- 6) $\vdash R(a)$ ($E \wedge (4)$)
- 7) $\vdash Q(a)$ ($E \rightarrow (5, 3)$)
- 8) $\vdash R(a) \wedge Q(a)$ ($I \wedge (6, 7)$)
- 9) $\vdash \exists x(Q(x) \wedge R(x))$ ($I\exists(8)$)

11.10 Examen final de septiembre 2006-2007

Fecha: 10 de septiembre de 2007

Tiempo: 3 horas

El examen está formado por siete problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1: (6 puntos) Para cada apartado, contesta verdadero o falso (no hace falta justificar tus repuestas):

En la lógica proposicional:

LP1) Toda forma satisfacible admite al menos un contraejemplo.

LP2) La deducción $\{p, q\} \rightarrow r$ no es verdadera si $p \wedge q$ es falso y r es falso.

LP3) La expresión $p \rightarrow (q \vee r) \wedge s$ es una fórmula proposicional escrita en forma abreviada.

En la lógica de primer orden:

LPO1) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists yP(y)$ es una fórmula válida.

LPO2) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ y $\neg \exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$ son fórmulas equivalentes.

LPO3) En la fórmula $\forall xP(x, y) \rightarrow \exists yQ(y)$ la variable y tiene una ocurrencia de variable libre.

Ejercicio 2: (18 puntos) Considera el conjunto L de las posibles listas ordenadas alfabéticamente, sin repeticiones, de los símbolos del conjunto $A = \{p, q, r, s, t\}$. Así, por ejemplo, la lista vacía $\emptyset$ y las listas $[q, s]$, $[p, s, t]$ y $[p, q, r, s, t]$ son elementos del conjunto L .

Sea $ord : L \times L \rightarrow L$ la función que a cada par de listas $(l_1, l_2) \in L \times L$ asocia una nueva lista en L formada por la unión de los elementos de l_1 y l_2 , ordenados alfabéticamente y sin repeticiones.

Usa la función ord y el principio de recursión estructural para definir la función

$$f : F \rightarrow L,$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica proposicional asocia la lista ordenada en L formada por sus proposiciones atómicas que pertenecen al conjunto A .

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (p \vee q \rightarrow r \wedge s) \wedge (r \rightarrow s) \rightarrow p \wedge q.$$

- a) (10 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ .
- b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ .
- c) (6 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ , $FNC(\varphi)$.

Ejercicio 4: (8 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza las siguientes frases usando como dominio $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \dots\}$. Define claramente las constantes, las funciones y los predicados utilizados en tu formalización.

- a) El doble de todo número natural es par.
- b) Ningún par divide a un impar.
- c) Si dos números naturales son divisores el uno del otro, entonces son iguales.
- d) Un número natural divide a todos los números naturales sólo si es igual a 1.

Ejercicio 5: Considera las dos tablas de la figura 11.6.

En el dominio

$$D = \{A, B, C, D, E\}$$

de las cinco letras que ocupan las dos tablas, considera los siguientes predicados:

$A(x, y) : x$ está más arriba que y (x y y distintas),

$M(x, y) : x$ está en la misma fila que y (x y y distintas).

Sean $\mathbb{I}_1 = (D, I_1)$ $\mathbb{I}_2 = (D, I_2)$ las dos interpretaciones representadas en las tablas 1 y 2 de la figura 11.6, respectivamente.

- a) (12 puntos) Define explícitamente los conjuntos A^{I_1} , M^{I_1} y A^{I_2} , M^{I_2} .
- b) (12 puntos) Evalúa las siguientes seis fórmulas en cada una de las dos interpretaciones del apartado a:

$$\varphi_1 : \exists x \forall y A(x, y),$$

$$\varphi_2 : \forall x \exists y A(y, x),$$

$$\varphi_3 : \exists x \forall y \neg M(x, y),$$

$$\varphi_4 : \exists x \forall y \neg A(x, y),$$

A			E
		B	
		C	
	D		

	A	B	
	C	D	
			E

Figura 11.6: Tablas del ejercicio 5

$$\varphi_5 : \exists x \forall y \neg (A(x, y) \vee M(x, y)),$$

$$\varphi_6 : \exists x \exists y \exists z (M(x, y) \wedge A(x, z)).$$

Ejercicio 6: (10 puntos) Por medio de un contraejemplo verifica que las fórmulas φ y ψ no son lógicamente equivalentes:

$$\varphi : \forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \exists y \neg P(x, y), \quad \psi : \forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x, y)).$$

Ejercicio 7: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, demuestra la validez de la deducción:

$$\{\forall x (P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x)), \forall x (P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x) \rightarrow S(x)), \\ \exists x (S(x) \wedge P(x) \rightarrow T(x))\} \vdash \exists x (P(x) \wedge Q(x) \rightarrow T(x)).$$

11.11 Soluciones del examen final de septiembre 2006-2007

Fecha: 10 de septiembre de 2007

Tiempo: 3 horas

Ejercicio 1: (6 puntos) Para cada apartado, contesta verdadero o falso (no hace falta justificar tus repuestas):

En la lógica proposicional:

LP1) Toda forma satisfacible admite al menos un contraejemplo.

LP2) La deducción $\{p, q\} \rightarrow r$ no es verdadera si $p \wedge q$ es falso y r es falso.

LP3) La expresión $p \rightarrow (q \vee r) \wedge s$ es una fórmula proposicional escrita en forma abreviada.

En la lógica de primer orden:

LPO1) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists yP(y)$ es una fórmula válida.

LPO2) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ y $\neg \exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$ son fórmulas equivalentes.

LPO3) En la fórmula $\forall xP(x, y) \rightarrow \exists yQ(y)$ la variable y tiene una ocurrencia de variable libre.

Solución:

LP1) Falso: si una fórmula es una tautología es satisfacible y no admite un contraejemplo.

LP2) Falso: por el teorema de la deducción, la deducción $\{p, q\} \rightarrow r$ se puede escribir como una implicación $p \wedge q \rightarrow r$. Si $p \wedge q$ es falso, la implicación es verdadera.

LP3) Verdadero: $p \rightarrow (q \vee r) \wedge s$ es la forma abreviada de la fórmula $(p \rightarrow ((q \vee r) \wedge s))$.

LPO1) Verdadero: $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x) \vdash \forall xP(x) \vdash \exists xP(x)$.

LPO2) Verdadero: $\neg \exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$ es equivalente a $\forall x\neg(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$, equivalente a $\forall x(P(x) \vee Q(x))$.

LPO3) Verdadero: la variable y tiene una ocurrencia de variable libre en $\forall xP(x, y)$, ya que no hay ningún cuantificador que la afecte.

Ejercicio 2: (18 puntos) Considera el conjunto L de las posibles listas ordenadas alfabéticamente, sin repeticiones, de los símbolos del conjunto $A = \{p, q, r, s, t\}$. Así, por ejemplo, la lista vacía $\emptyset$ y las listas $[q, s]$, $[p, s, t]$ y $[p, q, r, s, t]$ son elementos del conjunto L .

Sea $ord : L \times L \longrightarrow L$ la función que a cada par de listas $(l_1, l_2) \in L \times L$ asocia una nueva lista en L formada por la unión de los elementos de l_1 y l_2 , ordenados alfabéticamente y sin repeticiones.

Usa la función *ord* y el principio de recursión estructural para definir la función

$$f : F \longrightarrow L,$$

que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica proposicional asocia la lista ordenada en L formada por sus proposiciones atómicas que pertenecen al conjunto A .

Solución:

$$1. \text{ Base (At): } f(\top) = f(\perp) = \emptyset, \quad f(p) = \begin{cases} [p] & \text{si } p \in A, \\ \emptyset & \text{si } p \notin A. \end{cases}$$

2. Pasos recursivos:

$$(\neg): f(\neg(\varphi)) = f(\varphi),$$

$$(\circ): f(\varphi \circ \psi) = \text{ord}(f(\varphi), f(\psi)), \text{ para todo conectivo binario } \circ \text{ y todo par de fórmulas } \varphi \text{ y } \psi.$$

Estas definiciones determinan la función f sobre todo F .

Ejercicio 3: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (p \vee q \rightarrow r \wedge s) \wedge (r \rightarrow s) \rightarrow p \wedge q.$$

- a) (10 puntos) Usa el método de los tableaux semánticos para clasificar φ .
- b) (4 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ .
- c) (6 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ , $FNC(\varphi)$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \varphi : (p \vee q \rightarrow r \wedge s) \wedge (r \rightarrow s) \rightarrow p \wedge q &\equiv \\ \equiv \neg(\neg(p \vee q) \vee (r \wedge s)) \vee \neg(\neg r \vee s) \vee (p \wedge q) &\equiv \\ \equiv ((p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg s)) \vee (r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg\varphi &\equiv (\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg r \vee \neg s)) \wedge \neg(r \wedge \neg s) \wedge \neg(p \wedge q) \equiv \\ &\equiv ((\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s)) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg q). \end{aligned}$$

Los tableaux completos de $\neg\varphi$ y φ tienen ramas abierta (ver figuras 11.11 y 11.8). Se sigue que φ es una contingencia.

b) Del tableau de φ se deduce que la valoración $\{p = 1, q = 1, r = 0, s = 0\}$ es un modelo de φ .

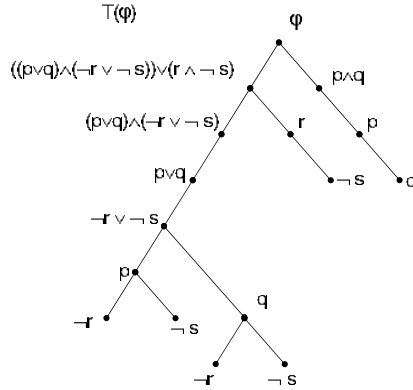


Figura 11.7: Tableaux de φ del ejercicio 3.

Del tableau de $\neg\varphi$ se deduce que la valoración $\{p = 0, q = 0, r = 1, s = 1\}$ es un contraejemplo de φ .

c) Mirando a la única rama abierta del tableau de $\neg\varphi$ se obtiene que:

$$FND(\neg\varphi) = (\neg q \wedge \neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg p \wedge s) \vee (r \wedge \neg p \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge s) \vee (r \wedge \neg q \wedge s) \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg p \wedge s) \vee (r \wedge \neg q \wedge s).$$

Entonces,

$$FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi) = (p \vee q \vee r) \wedge (q \vee p \vee \neg s) \wedge (r \vee p \vee \neg s).$$

Ejercicio 4: (8 puntos) En el contexto de la lógica de primer orden, formaliza las siguientes frases usando como dominio $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \dots\}$. Define claramente las constantes, las funciones y los predicados utilizados en tu formalización.

- El doble de todo número natural es par.
- Ningún par divide a un impar.
- Si dos números naturales son divisores el uno del otro, entonces son iguales.
- Un número natural divide a todos los números naturales sólo si es igual a 1.

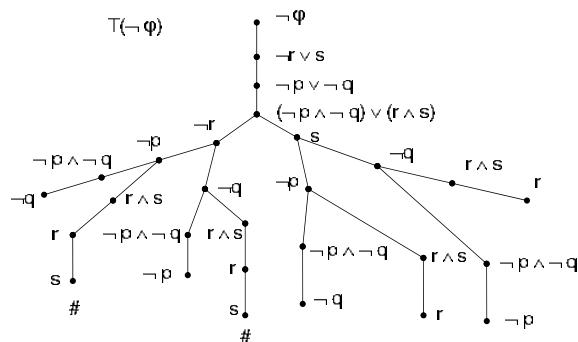


Figura 11.8: Tableaux de $\neg\varphi$ del ejercicio 3.

Solución:

Constantes: $1 \in \mathbb{N}$,

Funciones: $M2(n) = 2n$, que es la función que a todo número natural n le asocia su doble $2n$.

Predicados: $P(n) = n$ es par, $D(n, m) = n$ es un divisor de m y $I(n, m) = n$ es igual a m .

Notar que no haría falta definir el predicado $I(n, m) = n$, siendo el símbolo de igualdad ya definido en nuestro sistema de la lógica de predicados.

Con las definiciones anteriores, la formalización de las frases dadas es:

a) El doble de todo número natural es par.

$$\forall n P(M2(n)).$$

b) Ningún par divide a un impar.

$$\forall n \forall m (P(n) \wedge \neg P(m) \rightarrow \neg D(n, m)) \equiv \forall n \forall m (\neg P(n) \vee P(m) \vee \neg D(n, m)).$$

c) Si dos números naturales son divisores el uno del otro, entonces son iguales.

$$\forall n \forall m (D(n, m) \wedge D(m, n) \rightarrow I(n, m)) \equiv \forall n \forall m (\neg D(n, m) \vee \neg D(m, n) \vee I(n, m)).$$

d) Un número natural divide a todos los números naturales sólo si es igual a 1.

$$\forall n(\forall m D(n, m) \rightarrow I(n, 1)) \equiv \forall n(\exists m \neg D(n, m) \vee I(n, 1)).$$

A			E
		B	
		C	
	D		

	A	B	
	C	D	
			E

Figura 11.9: Tablas del ejercicio 5

Ejercicio 5: Considera las dos tablas de la figura 11.9.

En el dominio

$$D = \{A, B, C, D, E\}$$

de las cinco letras que ocupan las dos tablas, considera los siguientes predicados:

$A(x, y) : x$ está más arriba que y (x y y distintas),

$M(x, y) : x$ está en la misma fila que y (x y y distintas).

Sean $\mathbb{I}_1 = (D, I_1)$ $\mathbb{I}_2 = (D, I_2)$ las dos interpretaciones representadas en las tablas 1 y 2 de la figura 11.9, respectivamente.

a) (12 puntos) Define explícitamente los conjuntos A^{I_1} , M^{I_1} y A^{I_2} , M^{I_2} .

b) (12 puntos) Evalúa las siguientes seis fórmulas en cada una de las dos interpretaciones del apartado a):

$$\varphi_1 : \exists x \forall y A(x, y),$$

$$\varphi_2 : \forall x \exists y A(y, x),$$

$$\varphi_3 : \exists x \forall y \neg M(x, y),$$

$$\varphi_4 : \exists x \forall y \neg A(x, y),$$

$$\varphi_5 : \exists x \forall y \neg (A(x, y) \vee M(x, y)),$$

$$\varphi_6 : \exists x \exists y \exists z (M(x, y) \wedge A(x, z)).$$

Solución:

a)

$$A^{I_1} = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D), (E, B), (E, C), (E, D)\},$$

$$M^{I_1} = \{(A, E), (E, A)\},$$

$$A^{I_2} = \{(A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, E), (D, E)\},$$

$$M^{I_2} = \{(A, B), (B, A), (C, D), (D, C)\}.$$

b)

$(\varphi_1)^{I_1} = (\varphi_1)^{I_2} = 0$, ya que en las dos tablas no existe ninguna letra que esté más arriba de todas las demás letras.

$(\varphi_2)^{I_1} = (\varphi_2)^{I_2} = 0$, ya que si $x = A$, en las dos tablas no hay otras letras más arriba de A .

$(\varphi_3)^{I_1} = 1$, ya que si $x = D$, $(\forall y \neg M(D, y))^{I_1} = 1$, siendo $(D, y) \notin M^{I_1}$ para todo y ,

$(\varphi_3)^{I_2} = 1$, ya que si $x = E$, $(\forall y \neg M(E, y))^{I_2} = 1$, siendo $(E, y) \notin M^{I_2}$ para todo y ,

$(\varphi_4)^{I_1} = 1$, ya que si $x = D$, $(\forall y \neg A(D, y))^{I_1} = 1$, siendo $(D, y) \notin A^{I_1}$ para todo y ,

$(\varphi_4)^{I_2} = 1$, ya que si $x = E$, $(\forall y \neg A(E, y))^{I_2} = 1$, siendo $(E, y) \notin A^{I_2}$ para todo y ,

$(\varphi_5)^{I_1} = 1$, ya que si $x = D$, $(\forall y \neg A(D, y))^{I_1} = 1$, siendo $(D, y) \notin A^{I_1}$ para todo y y $(\forall y \neg M(D, y))^{I_1} = 1$, siendo $(D, y) \notin M^{I_1}$ para todo y ,

$(\varphi_5)^{I_2} = 1$, ya que si $x = E$, $(\forall y \neg A(E, y))^{I_2} = 1$, siendo $(E, y) \notin A^{I_2}$ para todo y y $(\forall y \neg M(E, y))^{I_2} = 1$, siendo $(E, y) \notin M^{I_2}$ para todo y ,

$(\varphi_6)^{I_1} = 1$, ya que, por ejemplo, $(M(A, E) \wedge A(A, B))^{I_1} = 1$,

$(\varphi_6)^{I_2} = 1$, ya que, por ejemplo, $(M(A, B) \wedge A(A, C))^{I_2} = 1$.

Ejercicio 6: (10 puntos) Por medio de un contraejemplo verifica que las fórmulas φ y ψ no son lógicamente equivalentes:

$$\varphi : \forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \exists y \neg P(x, y), \quad \psi : \forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x, y)).$$

Solución:

Siendo las dos fórmulas φ y ψ cerradas, para verificar que no son equivalentes basta con definir una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que los valores φ^I y ψ^I sean distintos.

Sea, por ejemplo, $\mathbb{I} = (D, I)$ la interpretación definida como:

$$D = \{a, b, c\},$$

$$I : \quad P^I = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}, \quad Q^I = \{(a, c), (b, a), (c, b)\}.$$

Sabemos que $\varphi \equiv \forall x (\exists y P(x, y) \wedge \exists z \neg P(x, z))$. Entonces $\varphi^I = 1$ ya que todo elemento $x \in D$ se relaciona con al menos otro elemento (el dominio de la relación es todo D) y no se relaciona con sí mismo.

Por el otro lado, $\psi^I = 0$, ya que, si $x = a$, ninguna asignación de la y es tal que $(a, y) \in P^I$ y $(a, y) \in Q^I$. En efecto, para que sea $(a, y) \in P^I$, tiene que ser $y = b$, pero $(a, b) \notin Q^I$.

Ejercicio 7: (14 puntos) Usando el sistema de deducción natural, demuestra la validez de la deducción:

$$\{\forall x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x)), \forall x(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x) \rightarrow S(x)), \\ \exists x(S(x) \wedge P(x) \rightarrow T(x))\} \vdash \exists x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow T(x)).$$

Solución:

- 1) $\forall x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))$ (Premisa)
- 2) $\forall x(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x) \rightarrow S(x))$ (Premisa)
- 3) $\exists x(S(x) \wedge P(x) \rightarrow T(x))$ (Premisa)
- 4) $\vdash S(y) \wedge P(y) \rightarrow T(y)$ (Premisa auxiliar)
- 5) $P(y) \wedge Q(y)$ (Premisa auxiliar)
- 6) $\vdash P(y) \wedge Q(y) \rightarrow R(y)$ ($E\forall(1)$)
- 7) $\vdash R(y)$ ($E \rightarrow (5, 6)$)
- 8) $\vdash P(y) \wedge Q(y) \wedge R(y) \rightarrow S(y)$ ($E\forall(2)$)
- 9) $\vdash P(y) \wedge Q(y) \wedge R(y)$ ($I \wedge (5, 7)$)
- 10) $\vdash S(y)$ ($E \rightarrow (9, 8)$)
- 11) $\vdash P(y)$ ($E \wedge (9)$)
- 12) $\vdash S(y) \wedge P(y)$ ($I \wedge (10, 11)$)
- 13) $\vdash T(y)$ ($E \rightarrow (12, 4)$)
- 14) $\vdash P(y) \wedge Q(y) \rightarrow T(y)$ ($I \rightarrow (5, 13)$)
- 15) $\vdash (S(y) \wedge P(y) \rightarrow T(y)) \rightarrow (P(y) \wedge Q(y) \rightarrow T(y))$ ($I \rightarrow (4, 14)$)
- 16) $\vdash P(y) \wedge Q(y) \rightarrow T(y)$ ($E\exists(3, (4, 14))$)
- 17) $\vdash \exists x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow T(x))$ ($I\exists(16)$)

11.12 Examen final de febrero 2007-2008

Fecha: 12 de febrero de 2008 Tiempo: 3 horas

El examen está formado por siete problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1: (6 puntos)

En la lógica proposicional: Para cada apartado, contesta verdadero o falso. No necesitas justificar tus respuestas.

LP1) La expresión $(\neg p \wedge \neg r \rightarrow p \vee q \wedge s) \rightarrow \neg s$ es una fórmula proposicional en forma abreviada.

LP2) Usando formas abreviadas, la fórmula proposicional $\neg(p \wedge \neg(r \rightarrow s)) \wedge t$ es equivalente a la fórmula proposicional $(\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge t$.

LP3) Sea φ una fórmula proposicional. Si el tableau acabado de la fórmula $\neg\varphi$ no está cerrado, entonces φ no es una tautología.

En la lógica de primer orden: Contesta a las siguientes cuestiones. No necesitas justificar tus respuestas.

LPO1) ¿Es la fórmula $\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$ válida?

LPO2) ¿Es la fórmula $\exists x \forall y Q(x, y) \vee \exists z Q(x, z)$ abierta?

LPO3) Si $D = \{a\}$ es un dominio con un elemento y R es un símbolo de predicado de aridad 3, ¿cuántas interpretaciones distintas para R existen sobre D ?

Ejercicio 2: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (p \wedge \neg q) \vee (r \rightarrow (s \vee q)) \rightarrow p \wedge q.$$

- a) (8 puntos) Por medio de tableaux semánticos acabados clasifica φ .
- b) (3 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ .
- c) (3 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ , $FNC(\varphi)$.

Ejercicio 3: (20 puntos) En el contexto de la lógica proposicional y usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de la deducción:

$$\{\neg r \rightarrow \neg p \wedge \neg s, q \rightarrow s\} \vdash p \vee q \rightarrow r.$$

Ejercicio 4: (20 puntos) Usa el principio de recursión estructural para definir las siguientes funciones:

- a) La función $ar_1 : T \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada término $t \in T$ de la lógica de primer orden le asocia el número de aristas de su árbol estructural.
- b) La función $ar_2 : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia el número de aristas de su árbol estructural (puedes apoyarte en la función ar_1 del apartado anterior).

Ejercicio 5: (10 puntos) Formaliza en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados escritos en lenguaje natural. En cada caso indica cuáles son el dominio y los símbolos de función y predicado (incluidas constantes y proposiciones atómicas) que estás usando.

- a) Sólo los hombres son mortales y algunos mortales son cobardes.
- b) Todo el mundo da limosna a Pedro, pero Pedro no da limosna a nadie.
- c) En el conjunto de los números reales, dado un número positivo siempre hay otro número positivo menor que el primero.
- d) En el conjunto de los números naturales, todos los números primos distintos de dos son impares.

Ejercicio 6: (10 puntos) Considera las siguientes fórmulas, donde P es un símbolo de predicado de aridad 3:

$$\varphi_1 : \forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$$

$$\varphi_2 : \exists z \forall x \forall y P(x, y, z)$$

Demuestra que no son equivalentes. Para ello encuentra una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ en la cual una de ellas sea verdadera y la otra falsa. Justifica por qué en cada uno de los dos casos.

Ejercicio 7: (20 puntos) Consideremos P , Q y R símbolos de predicado de aridades 1, 1 y 2 respectivamente. Consideramos una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que el dominio es $D = \{a, b, c, d, e\}$ y tal que

$$P^I = \{b, e\}$$

$$Q^I = \{c, d, e\}$$

$$R^I = \{(a, a), (b, b), (c, d), (d, c), (d, d), (e, e), (a, e)\}$$

Evalúa las siguientes fórmulas en la interpretación $\mathbb{I}$. Justifica tus respuestas.

$$\varphi_1 : \forall x (R(x, x) \rightarrow Q(x))$$

$$\varphi_2 : \exists x (\neg P(x) \wedge Q(x))$$

$$\varphi_3 : \exists x \exists y (R(x, y) \rightarrow P(x))$$

$$\varphi_4 : \forall x (P(x) \vee Q(x) \vee R(x, x))$$

$$\varphi_5 : \forall x \exists y R(x, y)$$

$$\varphi_6 : \exists x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$$

11.13 Soluciones del examen final de febrero 2007-2008

Fecha: 12 de febrero de 2008

Tiempo: 3 horas

Ejercicio 1: (6 puntos)

En la lógica proposicional: Para cada apartado, contesta verdadero o falso. No necesitas justificar tus respuestas.

LP1) La expresión $(\neg p \wedge \neg r \rightarrow p \vee q \wedge s) \rightarrow \neg s$ es una fórmula proposicional en forma abreviada.

LP2) Usando formas abreviadas, la fórmula proposicional $\neg(p \wedge \neg(r \rightarrow s)) \wedge t$ es equivalente a la fórmula proposicional $(\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge t$.

LP3) Sea φ una fórmula proposicional. Si el tableau acabado de la fórmula $\neg\varphi$ no está cerrado, entonces φ no es una tautología.

En la lógica de primer orden: Contesta a las siguientes cuestiones. No necesitas justificar tus respuestas.

LPO1) ¿Es la fórmula $\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$ válida?

LPO2) ¿Es la fórmula $\exists x \forall y Q(x, y) \vee \exists z Q(x, z)$ abierta?

LPO3) Si $D = \{a\}$ es un dominio con un elemento y R es un símbolo de predicado de aridad 3, ¿cuántas interpretaciones distintas para R existen sobre D ?

Solución:

LP1) FALSO: $(\neg p \wedge \neg r \rightarrow p \vee q \wedge s) \rightarrow \neg s$ no es una expresión sintácticamente correcta ya que $p \vee q \wedge s$ no es una fórmula bien construida, ni una forma reducida de una fórmula proposicional: los conectivos $\wedge$ y $\vee$ tienen el mismo nivel de precedencia.

LP2) VERDADERO: $\neg(p \wedge \neg(r \rightarrow s)) \wedge t \equiv (\neg p \vee (\neg r \vee s)) \wedge t \equiv (\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge t$.

LP3) VERDADERO: Si el tableau acabado de $\neg\varphi$ tiene una rama abierta, dando valor 1 a los literales que aparecen en esa rama se obtiene un contraejemplo de la fórmula φ .

LPO1) VERDADERO: $\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$ es una fórmula cerrada y, para cualquier interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$, si $(\forall x P(x))^I$ es verdadera, necesariamente $(\exists y P(y))^I$ también lo es, ya que $P^I(a)$ es verdadera para todo $a \in D$.

LPO2) VERDADERO: la fórmula $\exists x \forall y Q(x, y) \vee \exists z Q(x, z)$ es abierta, siendo la variable x libre en $\exists z Q(x, z)$.

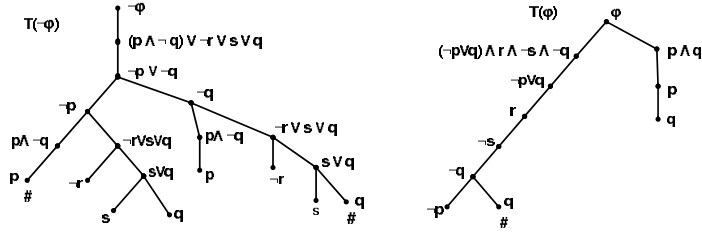


Figura 11.10: Tableaux acabados de $\neg\varphi$ y de φ del problema 2

LPO3) Si $D = \{a\}$ es un dominio con un elemento y R es un símbolo de predicado de aridad 3, R es un cualquier subconjunto del producto cartesiano $D^3 = D \times D \times D = \{(a, a, a)\}$. Los subconjuntos de D^3 son dos: $\emptyset$ y D^3 .

Ejercicio 2: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (p \wedge \neg q) \vee (r \rightarrow (s \vee q)) \rightarrow p \wedge q.$$

- (8 puntos) Por medio de tableaux semánticos acabados clasifica φ .
- (3 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ .
- (3 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ , $FNC(\varphi)$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \varphi &= (p \wedge \neg q) \vee (r \rightarrow (s \vee q)) \rightarrow p \wedge q \equiv \\ &\equiv (\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(r \rightarrow (s \vee q))) \vee (p \wedge q) \\ &\equiv ((\neg p \vee q) \wedge r \wedge \neg s \wedge \neg q) \vee (p \wedge q). \\ \neg\varphi &\equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg r \vee s \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q). \end{aligned}$$

Los tableaux acabados de $\neg\varphi$ y de φ están representados en la figura 11.10.

Ya que los dos tableaux no están cerrados, la fórmula φ es una contingencia.

b) De la segunda rama abierta del tableau de φ se deduce que, por ejemplo, la valoración $\{p = 1, q = 1, r = 0, s = 1\}$ es un modelo de φ .

De la primera rama abierta del tableau de $\neg\varphi$ se deduce que, por ejemplo, la valoración $\{p = 0, q = 0, r = 0, s = 0\}$ es un contraejemplo de φ .

c)

$$FNC(\varphi) = \neg FND(\neg\varphi) \equiv$$

$$\begin{aligned} &\equiv \neg((\neg r \wedge \neg p) \vee (s \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge \neg q) \vee (s \wedge \neg q)) \equiv \\ &\equiv (r \vee p) \wedge (\neg s \vee p) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (r \vee q) \wedge (\neg s \vee q). \end{aligned}$$

Ejercicio 3: (20 puntos) En el contexto de la lógica proposicional y usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de la deducción:

$$\{\neg r \rightarrow \neg p \wedge \neg s, q \rightarrow s\} \vdash p \vee q \rightarrow r.$$

Solución:

Por el teorema de la deducción, para verificar la validez del razonamiento dado podemos verificar la validez del razonamiento:

$$\{\neg r \rightarrow \neg p \wedge \neg s, q \rightarrow s, p \vee q\} \vdash r.$$

- 1) $\neg r \rightarrow \neg p \wedge \neg s$ (Premisa)
- 2) $q \rightarrow s$ (Premisa)
- 3) $p \vee q$ (Premisa)

- 4) $\vdash \neg r$ (Premisa auxiliar)
- 5) $\vdash \neg p \wedge \neg s$ ($E \rightarrow (4, 1)$)
- 6) $\vdash \neg p$ ($E \wedge (5)$)
- 7) $\vdash q$ ($Tolendo Ponens(6, 3)$)
- 8) $\vdash s$ ($E \rightarrow (7, 2)$)
- 9) $\vdash \neg s$ ($E \wedge (5)$)
- 10) $\vdash s \wedge \neg s$ ($I \wedge (8, 9)$)

$$11) \vdash r \quad (I \neg(4, 10))$$

Se sigue que el razonamiento dado es válido.

Solución:

a) Base: Si t es un término atómico (es decir, t es una variable o una constante) su árbol estructural no tiene aristas. Por tanto:

$$ar_1(t) = 0$$

Paso recursivo: Si t es el término compuesto $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, entonces aparecen n nuevas aristas:

$$ar_1(t) = ar_1(t_1) + ar_1(t_2) + \dots + ar_1(t_n) + n$$

b) Base: Si la fórmula es una proposición atómica p , el símbolo $\top$ o el símbolo $\perp$, entonces su árbol no tiene aristas:

$$ar_2(\top) = 0$$

$$ar_2(\perp) = 0$$

$$ar_2(p) = 0$$

Para los otros dos tipos de fórmulas atómicas, que se construyen a partir de términos, necesitamos usar la función ar_1 definida en el apartado anterior.

Si φ es una igualdad de términos ($t = s$), entonces:

$$ar_2(\varphi) = ar_1(t) + ar_1(s) + 2$$

Si φ es $P(t_1, \dots, t_n)$ donde P es un símbolo de predicado y los t_i son términos, entonces:

$$ar_2(\varphi) = ar_1(t_1) + \dots + ar_1(t_n) + n$$

Paso recursivo: Si φ y ψ son fórmulas, x es un símbolo de variable y $\circ$ es una conectiva binaria, entonces:

$$ar_2(\neg\varphi) = ar_2(\varphi) + 1$$

$$ar_2(\varphi \circ \psi) = ar_2(\varphi) + ar_2(\psi) + 2$$

$$ar_2(\forall x \varphi) = ar_2(\varphi) + 2$$

$$ar_2(\exists x \varphi) = ar_2(\varphi) + 2$$

(Nótese que, en el caso de los cuantificadores, aparecen dos aristas nuevas, una para la variable x y otra para la fórmula φ).

Ejercicio 5: (10 puntos) Formaliza en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados escritos en lenguaje natural. En cada caso indica cuáles son el dominio y los símbolos de función y predicado (incluidas constantes y proposiciones atómicas) que estás usando.

- a) Sólo los hombres son mortales y algunos mortales son cobardes.
- b) Todo el mundo da limosna a Pedro, pero Pedro no da limosna a nadie.
- c) En el conjunto de los números reales, dado un número positivo siempre hay otro número positivo menor que el primero.
- d) En el conjunto de los números naturales, todos los números primos distintos de dos son impares.

Solución: (La formalización indicada es una de las posibles, pero hay otras que también son correctas).

a) Dominio $D = \{\text{seres}\}$

Símbolos de predicado:

$H(x)$: x es un hombre.

$M(x)$: x es mortal.

$C(x)$: x es cobarde.

$$\forall x (M(x) \rightarrow H(x)) \wedge \exists x (M(x) \wedge C(x))$$

b) Dominio $D = \{\text{personas}\}$

Símbolos de predicado:

$L(x, y)$: x da limosna a y .

Símbolos de constante:

p : Pedro.

$$\forall x L(x, p) \wedge \forall x \neg L(p, x)$$

c) Dominio $D = \mathbb{R}$

Símbolos de predicado:

$P(x)$: x es positivo.

$M(x, y)$: x es menor que y .

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (P(y) \wedge M(y, x)))$$

d) Dominio $D = \mathbb{N}$

Símbolos de predicado:

$P(x)$: x es primo.

$I(x)$: x es impar.

Símbolos de constante:

d : 2

$$\forall x (P(x) \wedge \neg(x = d) \rightarrow I(x))$$

Ejercicio 6: (10 puntos) Considera las siguientes fórmulas, donde P es un símbolo de predicado de aridad 3:

$$\varphi_1 : \forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$$

$$\varphi_2 : \exists z \forall x \forall y P(x, y, z)$$

Demuestra que no son equivalentes. Para ello encuentra una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ en la cual una de ellas sea verdadera y la otra falsa. Justifica por qué en cada uno de los dos casos.

Solución: El hecho de que las dos fórmulas no sean equivalentes se debe a que para que φ_2 sea verdadera necesitamos que el mismo z aparezca combinado con todos los x, y posibles. En cambio en φ_1 nos basta con que cada pareja x, y aparezca combinada con algún z , que no tiene por qué ser el mismo para cada pareja.

Hay muchas interpretaciones (D, I) que hacen que $\varphi_1^I = 1$ y que $\varphi_2^I = 0$. Una de las más sencillas sea la siguiente:

$$D = \{a, b\}$$

$$P^I = \{(a, a, a), (a, b, a), (b, a, b), (b, b, b)\}$$

Ejercicio 7: (20 puntos) Consideremos P, Q y R símbolos de predicado de aridades 1, 1 y 2 respectivamente. Consideramos una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que el dominio es $D = \{a, b, c, d, e\}$ y tal que

$$P^I = \{b, e\}$$

$$Q^I = \{c, d, e\}$$

$$R^I = \{(a, a), (b, b), (c, d), (d, c), (d, d), (e, e), (a, e)\}$$

Evalúa las siguientes fórmulas en la interpretación $\mathbb{I}$. Justifica tus respuestas.

$$\varphi_1 : \forall x (R(x, x) \rightarrow Q(x))$$

$$\varphi_2 : \exists x (\neg P(x) \wedge Q(x))$$

$$\varphi_3 : \exists x \exists y (R(x, y) \rightarrow P(x))$$

$$\varphi_4 : \forall x (P(x) \vee Q(x) \vee R(x, x))$$

$$\varphi_5 : \forall x \exists y R(x, y)$$

$$\varphi_6 : \exists x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$$

Solución:

$$\varphi_1^I = 0$$

Si tomamos $x = a$, tenemos $(R(a, a) \rightarrow Q(a))^I = 0$, luego el $\forall$ es falso.

$$\varphi_2^I = 1$$

Si tomamos $x = c$, tenemos $(\neg P(c) \wedge Q(c))^I = 1$, luego el $\exists$ es verdadero.

$$\varphi_3^I = 1$$

Tomando $x = a$, $y = b$, tendremos $(R(a, b))^I = 0$,
por lo cual $(R(a, b) \rightarrow P(a))^I = 1$, luego el doble $\exists$ es verdadero.

$$\varphi_4^I = 1$$

Sea quien sea x una de las tres cláusulas de $(P(x) \vee Q(x) \vee R(x, x))$ es verdadera. Como estamos ante una disyunción, la fórmula será cierta para cualquier valor de x . Por tanto, el $\forall$ es verdadero.

$$\varphi_5^I = 1$$

$$(R(a, a))^I = 1$$

$$(R(b, b))^I = 1$$

$$(R(c, d))^I = 1$$

$$(R(d, c))^I = 1$$

$$(R(e, e))^I = 1$$

Es decir, todos los x de D están emparejados mediante R con al menos un elemento y perteneciente a D . Luego φ_5 es cierta.

$$\varphi_6^I = 0$$

Consideremos la fórmula $\psi : R(x, y) \vee R(y, x)$

Si $x = a$, entonces la asignación $y = b$ hace que ψ sea falsa.

Si $x = b$, entonces la asignación $y = a$ hace que ψ sea falsa.

Si $x = c$, entonces la asignación $y = a$ hace que ψ sea falsa.

Si $x = d$, entonces la asignación $y = a$ hace que ψ sea falsa.

Si $x = e$, entonces la asignación $y = b$ hace que ψ sea falsa.

Luego el $\exists$ es falso, no hemos conseguido encontrar ningún valor de x que haga cierta la fórmula que va a continuación.

11.14 Examen final de septiembre 2007-2008

Fecha: 8 de septiembre de 2008

Tiempo: 3 horas

El examen está formado por siete problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1: (6 puntos)

En la lógica proposicional: Para cada apartado, contesta verdadero o falso. No necesitas justificar tus respuestas.

LP1) La expresión $(\neg p \wedge r \rightarrow (p \wedge q \wedge s)) \vee \neg s$ es una fórmula proposicional en forma abreviada.

LP2) Usando formas abreviadas, la fórmula proposicional $\neg(p \rightarrow r \vee s) \vee t$ es equivalente a la fórmula proposicional $(p \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee t$.

LP3) Si el tableau acabado de una fórmula φ no está cerrado, entonces φ es satisfacible.

En la lógica de primer orden: Contesta a las siguientes cuestiones. No necesitas justificar tus respuestas.

LPO1) ¿Es la fórmula $\forall x P(x) \vee \neg \exists y P(y)$ válida?

LPO2) ¿Cuántas apariciones de variable libre hay en la siguiente fórmula?

$$\exists x P(f(x)) \wedge \forall y Q(x, y) \rightarrow P(y)$$

LPO3) Si $D = \{a, b, c\}$ es un dominio con tres elementos y P es un símbolo de predicado de aridad 1, ¿cuántas interpretaciones distintas para P existen sobre D ?

Ejercicio 2: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (\neg p \vee r) \vee ((r \rightarrow q) \wedge s) \rightarrow s \wedge q.$$

a) (8 puntos) Por medio de tableaux semánticos acabados clasifica φ .

b) (3 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ .

c) (3 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ , $FNC(\varphi)$.

Ejercicio 3: (20 puntos) En el contexto de la lógica proposicional y usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de la deducción:

$$\{p \vee r \rightarrow \neg(q \wedge t), \neg s \rightarrow q\} \vdash p \wedge t \rightarrow s.$$

Ejercicio 4: (20 puntos) Usa el principio de recursión estructural para definir las siguientes funciones:

a) La función $ver_1 : T \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada término $t \in T$ de la lógica de primer orden le asocia el número de vértices de su árbol estructural.

b) La función $ver_2 : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia el número de vértices de su árbol estructural (puedes apoyarte en la función ver_1 del apartado anterior).

Ejercicio 5: (10 puntos) Formaliza en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados escritos en lenguaje natural. En cada caso indica cuáles son el dominio y los símbolos de función y predicado (incluidas constantes y proposiciones atómicas) que estás usando.

a) Si dos personas se odian, uno de ellos es un héroe y el otro es un villano.

b) Carlos se sentó entre Arantxa y Bárbara pero nadie se sentó entre Darío y Ernesto.

c) En el conjunto de los números reales, el cuadrado de cualquier número negativo es un número positivo.

d) En el conjunto de los números naturales, hay números primos que no son suma de dos números pares.

Ejercicio 6: (10 puntos) Considera las siguientes fórmulas, donde P , Q y R son símbolos de predicado de aridad 1:

$$\varphi_1 : \exists x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))$$

$$\varphi_2 : \exists x(P(x) \wedge (Q(x) \rightarrow R(x)))$$

Demuestra que no son equivalentes. Para ello encuentra una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ en la cual una de ellas sea verdadera y la otra falsa. Justifica por

qué en cada uno de los dos casos.

Ejercicio 7: (20 puntos) Consideremos P , Q y R símbolos de predicado de aridades 1, 1 y 2 respectivamente. Consideramos una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que el dominio es $D = \{a, b, c, d\}$ y tal que

$$P^I = \{a, c\}$$

$$Q^I = \{c, d\}$$

$$R^I = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, d), (d, d)\}$$

Evalúa las siguientes fórmulas en la interpretación $\mathbb{I}$. Justifica tus respuestas.

$$\varphi_1 : \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\varphi_2 : \exists x (P(x) \vee \neg R(x, x))$$

$$\varphi_3 : \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$$

$$\varphi_4 : \exists x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x) \wedge \exists x R(x, x)$$

$$\varphi_5 : \exists x \forall y R(x, y)$$

$$\varphi_6 : \forall x \exists y (P(x) \rightarrow R(x, y))$$

11.15 Soluciones del examen final de septiembre 2007-2008

Fecha: 8 de septiembre de 2008

Tiempo: 3 horas

Ejercicio 1: (6 puntos)

En la lógica proposicional: Para cada apartado, contesta verdadero o falso. No necesitas justificar tus respuestas.

LP1) La expresión $(\neg p \wedge r \rightarrow (p \wedge q \wedge s)) \vee \neg s$ es una fórmula proposicional en forma abreviada.

LP2) Usando formas abreviadas, la fórmula proposicional $\neg(p \rightarrow r \vee s) \vee t$ es equivalente a la fórmula proposicional $(p \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee t$.

LP3) Si el tableau acabado de una fórmula φ no está cerrado, entonces φ es satisfacible.

En la lógica de primer orden: Contesta a las siguientes cuestiones. No necesitas justificar tus respuestas.

LPO1) ¿Es la fórmula $\forall x P(x) \vee \neg \exists y P(y)$ válida?

LPO2) ¿Cuántas apariciones de variable libre hay en la siguiente fórmula?

$$\exists x P(f(x)) \wedge \forall y Q(x, y) \rightarrow P(y)$$

LPO3) Si $D = \{a, b, c\}$ es un dominio con tres elementos y P es un símbolo de predicado de aridad 1, ¿cuántas interpretaciones distintas para P existen sobre D ?

Solución:

LP1) FALSO: su forma abreviada es $(\neg p \wedge r \rightarrow p \wedge q \wedge s) \vee \neg s$.

LP2) VERDADERO: $\neg(p \rightarrow r \vee s) \vee t \equiv \neg(\neg p \vee r \vee s) \vee t \equiv (p \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee t$.

LP3) VERDADERO: Si el tableau acabado de φ tiene una rama abierta, dando valor 1 a los literales que aparecen en esa rama se obtiene un modelo de la fórmula.

Ejercicio 2: En el contexto de la lógica proposicional, sea φ la siguiente fórmula:

$$\varphi : (\neg p \vee r) \vee ((r \rightarrow q) \wedge s) \rightarrow s \wedge q.$$

a) (8 puntos) Por medio de tableaux semánticos acabados clasifica φ .

b) (3 puntos) Si existen, halla un modelo y un contraejemplo de φ .

c) (3 puntos) Halla la forma normal conjuntiva de φ , $FNC(\varphi)$.

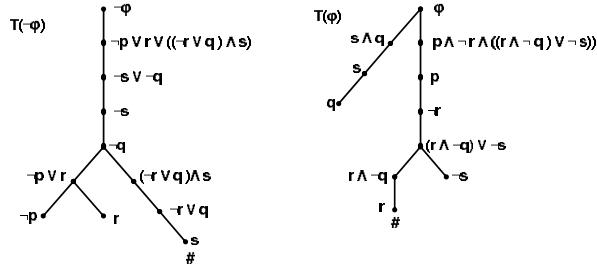


Figura 11.11: Tableaux acabados de $\neg\varphi$ y de φ del problema 2

Solución:

a)

$$\begin{aligned}\varphi &= (\neg p \vee r) \vee ((r \rightarrow q) \wedge s) \rightarrow s \wedge q \equiv \\ &\equiv \neg((\neg p \vee r) \vee ((\neg r \vee q) \wedge s)) \vee (s \wedge q) \equiv \\ &\equiv (p \wedge \neg r \wedge ((r \wedge \neg q) \vee \neg s)) \vee (s \wedge q).\end{aligned}$$

$$\neg\varphi \equiv (\neg p \vee r \vee ((\neg r \vee q) \wedge s)) \wedge (\neg s \vee \neg q).$$

Los tableaux acabados de $\neg\varphi$ y de φ están representados en la figura 11.11.

Ya que los dos tableaux no están cerrados, la fórmula φ es una contingencia.

b) De la primera rama abierta del tableau de φ se deduce que, por ejemplo, la valoración $\{p = 0, q = 1, r = 0, s = 1\}$ es un modelo de φ .

De la primera rama abierta del tableau de $\neg\varphi$ se deduce que, por ejemplo, la valoración $\{p = 0, q = 0, r = 1, s = 0\}$ es un contraejemplo de φ .

c)

$$\begin{aligned}FNC(\varphi) &= \neg FND(\neg\varphi) \equiv \neg((q \wedge s) \vee (\neg s \wedge \neg r \wedge p)) \equiv \\ &\equiv (\neg q \vee \neg s) \wedge (s \vee r \vee \neg p).\end{aligned}$$

Ejercicio 3: (20 puntos) En el contexto de la lógica proposicional y usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de la deducción:

$$\{p \vee r \rightarrow \neg(q \wedge t), \neg s \rightarrow q\} \vdash p \wedge t \rightarrow s.$$

Solución: Por el teorema de la deducción, para verificar la validez del razonamiento dado podemos verificar la validez del razonamiento:

$$\{p \vee r \rightarrow \neg(q \wedge t), \neg s \rightarrow q, p \wedge t\} \vdash s.$$

- 1) $p \vee r \rightarrow \neg(q \wedge t)$ (Premisa)
- 2) $\neg s \rightarrow q$ (Premisa)
- 3) $p \wedge t$ (Premisa)
- 4) $\vdash p$ ($E \wedge (3)$)
- 5) $\vdash t$ ($E \wedge (3)$)
- 6) $\vdash p \vee r$ ($I \vee (4)$)
- 7) $\vdash \neg(q \wedge t)$ ($E \rightarrow (6, 1)$)
- 8) $\vdash \neg q \vee \neg t$ (Ley de Morgan (7))

- 9) $\vdash \neg s$ (Premisa auxiliar)
- 10) $\vdash q$ ($E \rightarrow (9, 2)$)
- 11) $\vdash \neg t$ (Tollendo Ponens (8,10))
- 12) $\vdash t \wedge \neg t$ ($I \wedge (5, 11)$)

- 13) $\vdash s$ ($I \neg(9, 12)$)

Se sigue que el razonamiento dado es válido.

Ejercicio 4: (20 puntos) Usa el principio de recursión estructural para definir las siguientes funciones:

a) La función $ver_1 : T \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada término $t \in T$ de la lógica de primer orden le asocia el número de vértices de su árbol estructural.

b) La función $ver_2 : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia el número de vértices de su árbol estructural (puedes apoyarte en la función ver_1 del apartado anterior).

Solución:

a) Definimos la función ver_1 por recursión:

Para términos atómicos:

- $ver_1(c) = 1$, donde c es un símbolo de constante.
- $ver_1(x) = 1$, donde x es un símbolo de variable.

Paso recursivo:

- $ver_1(f(t_1, t_2, \dots, t_n)) = ver_1(t_1) + ver_1(t_2) + \dots + ver_1(t_n) + 1$,
donde f es un símbolo de función de aridad n y $t_1, t_2, \dots, t_n$ son términos.

b) Definimos la función ver_2 por recursión apoyándonos en la función ver_1 del apartado anterior:

Para fórmulas atómicas:

- $ver_2(\top) = ver_2(\perp) = 1$.
- $ver_2(p) = 1$, donde p es un símbolo de proposición atómica.
- $ver_2(t_1 = t_2) = ver_1(t_1) + ver_1(t_2) + 1$, donde t_1 y t_2 son términos.
- $ver_2(P(t_1, t_2, \dots, t_n)) = ver_1(t_1) + ver_1(t_2) + \dots + ver_1(t_n) + 1$,
donde P es un símbolo de predicado de aridad n y $t_1, t_2, \dots, t_n$ son términos.

Paso recursivo:

- $ver_2(\neg\varphi) = ver_2(\varphi) + 1$,
- $ver_2(\varphi \circ \psi) = ver_2(\varphi) + ver_2(\psi) + 1$,
- $ver_2(\forall x\varphi) = ver_2(\exists x\varphi) = ver_2(\varphi) + 2$,

donde φ y ψ son fórmulas, $\circ$ es una conectiva binaria y x es un símbolo de variable.

Ejercicio 5: (10 puntos) Formaliza en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados escritos en lenguaje natural. En cada caso indica cuáles son el dominio y los símbolos de función y predicado (incluidas constantes y proposiciones atómicas) que estás usando.

- Si dos personas se odian, uno de ellos es un héroe y el otro es un villano.
- Carlos se sentó entre Arantxa y Bárbara pero nadie se sentó entre Darío y Ernesto.
- En el conjunto de los números reales, el cuadrado de cualquier número negativo es un número positivo.
- En el conjunto de los números naturales, hay números primos que no son suma de dos números pares.

Solución:

a) Dominio: $D = \{personas\}$.

Símbolos de predicados:

$O(x, y) = x$ odia a y ,

$H(x) = x$ es un héroe,

$V(x) = x$ es un villano.

$$\forall x \forall y (O(x, y) \vee O(y, x) \rightarrow (H(x) \wedge V(y)) \vee (H(y) \wedge V(x))).$$

b) Dominio: $D = \{personas\}$.

Símbolos de predicados:

$S(x, y, z) = y$ se sienta entre x y z .

Símbolos de constantes:

A=Arantxa, B=Bárbara, C=Carlos, D= Darío, E=Ernesto.

$$S(A, C, B) \wedge \forall x \neg S(D, x, E).$$

c) Dominio: $D = \mathbb{R}$.

Símbolos de predicados:

$P(x) = x$ es positivo,

$N(x) = x$ es negativo.

Símbolos de funciones:

$f(x) = x^2$.

$$\forall x (N(x) \rightarrow P(f(x))).$$

d) Dominio: $D = \mathbb{N}$.

Símbolos de predicados:

$Pr(x) = x$ es primo,

$P(x) = x$ es par.

Símbolos de funciones:

$f(x, y) = x + y$.

$$\exists x (Pr(x) \wedge \forall y \forall z (P(y) \wedge P(z) \rightarrow \neg(x = f(y, z)))).$$

Ejercicio 6: (10 puntos) Considera las siguientes fórmulas, donde P , Q y R son símbolos de predicado de aridad 1:

$$\varphi_1 : \exists x (P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))$$

$$\varphi_2 : \exists x (P(x) \wedge (Q(x) \rightarrow R(x)))$$

Demuestra que no son equivalentes. Para ello encuentra una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ en la cual una de ellas sea verdadera y la otra falsa. Justifica por qué en cada uno de los dos casos.

Solución: Sea $\mathbb{I} = (D, I)$ la interpretación definida por:

$D = \{a, b\}$ y

$P^I = \{a\}$, $Q^I = \{a, b\}$, $R^I = \emptyset$.

Entonces:

$\varphi_1^I = 1$, ya que $(P(b) \wedge Q(b) \rightarrow R(b))^I = 1$ siendo una implicación con premisa falsa y

$\varphi_2^I = 0$ ya que $(P(a) \wedge (Q(a) \rightarrow R(a)))^I = 0$, siendo $Q^I(a) = 1$ y $R^I(a) = 0$ y $(P(b) \wedge (Q(b) \rightarrow R(b)))^I = 0$, siendo $P^I(b) = 0$.

Se sigue que φ_1 y φ_2 no son equivalentes.

Ejercicio 7: (20 puntos) Consideremos P , Q y R símbolos de predicado de aridades 1, 1 y 2 respectivamente. Consideramos una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ tal que el dominio es $D = \{a, b, c, d\}$ y tal que

$$P^I = \{a, c\}$$

$$Q^I = \{c, d\}$$

$$R^I = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, d), (d, d)\}$$

Evalúa las siguientes fórmulas en la interpretación $\mathbb{I}$. Justifica tus respuestas.

$$\varphi_1 : \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\varphi_2 : \exists x (P(x) \vee \neg R(x, x))$$

$$\varphi_3 : \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$$

$$\varphi_4 : \exists x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x) \wedge \exists x R(x, x)$$

$$\varphi_5 : \exists x \forall y R(x, y)$$

$$\varphi_6 : \forall x \exists y (P(x) \rightarrow R(x, y))$$

Solución:

$\varphi_1^I = 0$ ya que, si $x = a$, $(P(a) \rightarrow Q(a))^I = 0$, siendo $P^I(a) = 1$ y $Q^I(a) = 0$,

$\varphi_2^I = 1$ ya que, si $x = a$, $(P(a) \vee \neg R(a, a))^I = 1$, siendo $P^I(a) = 1$.

$\varphi_3^I = 0$ ya que, si $x = c$ y $y = d$, $(R(c, d) \rightarrow R(d, c))^I = 0$, siendo $R^I(c, d) = 1$ y $R^I(d, c) = 0$.

$\varphi_4^I = 1$ ya que, $(\exists x P(x))^I = 1$ (si $x = a$, $P^I(a) = 1$), $(\exists x \neg Q(x))^I = 1$ (si $x = a$, $(\neg Q)^I(a) = 1$) y $(\exists x R(x, x))^I = 1$ (si $x = a$, $R^I(a, a) = 1$).

$(\varphi_5)^I = 0$ ya que $R^I(x, c) = 0$ para todo valor de x .

$(\varphi_6)^I = 1$ ya que $P^I(b) = P^I(d) = 1$ y $(P(a) \rightarrow R(a, b))^I = (P(c) \rightarrow R(c, d))^I = 1$.

11.16 Examen final de febrero 2008-2009

Fecha: 10 de febrero de 2009 **Tiempo:** 3 horas

El examen está formado por 6 problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados. Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 1:

En la lógica proposicional:

a) (2 puntos) Expresa en forma usual (no abreviada) la fórmula proposicional:

$$\varphi = (p \wedge q \rightarrow r \vee s) \wedge p \rightarrow q \wedge s.$$

b) (2 puntos) Usando equivalencias lógicas, halla la forma normal disyuntiva de la fórmula φ del apartado anterior.

c) (2 puntos) Halla una fórmula φ que sea la formalización de la frase: *No voy a casa sólo si no tengo que estudiar.*

En la lógica de primer orden:

d) (2 puntos) Construye el árbol estructural de la siguiente fórmula:

$$\neg Q(f(a, b), c) \rightarrow \forall x Q(a, g(x)) \wedge P(f(g(b), x))$$

e) (2 puntos) Indica cuántas interpretaciones distintas admite un símbolo de predicado de aridad 3 en un dominio con 5 elementos.

f) (2 puntos) Indica si es o no correcto el siguiente razonamiento

$$\exists x \exists y P(x, y) \models \exists z P(z, z)$$

Ejercicio 2: (16 puntos) En el contexto de la lógica proposicional, clasifica la siguiente fórmula por medio de tableaux semánticos acabados:

$$(p \vee q \rightarrow r) \wedge t \wedge (p \rightarrow \neg s) \rightarrow q \wedge \neg t.$$

Ejercicio 3: (20 puntos) En el contexto de la lógica proposicional y usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de la deducción:

$$\{s \rightarrow (r \rightarrow t), p \vee s, \neg(r \rightarrow p)\} \vdash t.$$

Ejercicio 4: Usa el principio de recursión estructural para definir las siguientes funciones:

a) (6 puntos) La función $lt : T \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada término $t \in T$ de la lógica de primer orden le asocia su **longitud**, entendida como el número de caracteres que aparecen en ese término, **excluyendo** paréntesis y comas.

b) (10 puntos) La función $lf : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia su **longitud**, entendida como el número de caracteres que aparecen en ese término, **excluyendo** paréntesis y comas (apóyate en la función lt del apartado anterior).

Nota: Se considerará que todos los símbolos de variable, constante, función y predicado constan de un único carácter.

Ejercicio 5: (12 puntos, 2 por apartado) Formaliza en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados escritos en lenguaje natural. El dominio para todos ellos es $\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales. En cada caso indica cuáles son los símbolos de función y predicado (incluidas constantes y proposiciones atómicas) que estás usando.

a) Los números naturales son pares o impares, pero no las dos cosas a la vez.

b) Si un número es par, entonces su siguiente es impar.

c) Ningún número es igual a su siguiente.

d) El producto de un número y su siguiente es siempre par.

e) Todo número es menor que su siguiente.

f) Dado un número cualquiera distinto de uno siempre hay otro número menor.

Ejercicio 6: Se considera la siguiente lista ordenada de caracteres

AABADCCDADABBAC

y la interpretación (Dom, I) cuyo dominio es $Dom = \{A, B, C, D\}$ y en la cual se tienen los siguientes símbolos de predicado:

$P(x)$: x aparece en la lista dos o más veces consecutivas.

$Q(x, y)$: x aparece en la lista inmediatamente antes de y .

$R(x, y, z)$: y aparece en la lista inmediatamente antes de z e inmediatamente después de x .

Se considera también la función f de aridad 1 que intercambia A con B e intercambia C con D .

a) (6 puntos) Escribe explícitamente los conjuntos P^I y Q^I .

b) (18 puntos, 3 por fórmula) En la interpretación dada, evalúa las siguientes fórmulas. Justifica tus respuestas:

$$\varphi_1 : \forall x (P(f(x)) \rightarrow Q(x, x))$$

$$\varphi_2 : \exists x R(x, f(x), f(x))$$

$$\varphi_3 : \exists x \exists y (Q(x, x) \rightarrow R(y, y, y))$$

$$\varphi_4 : \forall x P(x) \vee \forall x \neg P(x)$$

$$\varphi_5 : \forall x \neg \forall y \neg R(x, y, x)$$

$$\varphi_6 : \exists x \forall y Q(x, y)$$

11.17 Soluciones del examen final de febrero 2008-2009

Fecha: 10 de febrero de 2009

Tiempo: 3 horas

Ejercicio 1:

En la lógica proposicional:

a) (2 puntos) Expresa en forma usual (no abreviada) la fórmula proposicional:

$$\varphi = (p \wedge q \rightarrow r \vee s) \wedge p \rightarrow q \wedge s.$$

b) (2 puntos) Usando equivalencias lógicas, halla la forma normal disyuntiva de la fórmula φ del apartado anterior.

c) (2 puntos) Halla una fórmula φ que sea la formalización de la frase: *No voy a casa sólo si no tengo que estudiar.*

En la lógica de primer orden:

d) (2 puntos) Construye el árbol estructural de la siguiente fórmula:

$$\neg Q(f(a, b), c) \rightarrow \forall x Q(a, g(x)) \wedge P(f(g(b), x))$$

e) (2 puntos) Indica cuántas interpretaciones distintas admite un símbolo de predicado de aridad 3 en un dominio con 5 elementos.

f) (2 puntos) Indica si es o no correcto el siguiente razonamiento

$$\exists x \exists y P(x, y) \models \exists z P(z, z)$$

Solución:

a)

$$\varphi = (((p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)) \wedge p) \rightarrow (q \wedge s).$$

b)

$$\begin{aligned} \varphi &= (p \wedge q \rightarrow r \vee s) \wedge p \rightarrow q \wedge s \equiv \neg((p \wedge q \rightarrow r \vee s) \wedge p) \vee (q \wedge s) \equiv \\ &\equiv \neg((\neg(p \wedge q) \vee r \vee s) \wedge p) \vee (q \wedge s) \equiv (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee \neg p \vee (q \wedge s) = FND(\varphi). \end{aligned}$$

c) Sean $p =$ voy a casa y $q =$ tengo que estudiar. Entonces,

$$\varphi = \neg p \rightarrow \neg q \equiv q \rightarrow p.$$

d) La figura 11.12 representa el árbol estructural de la fórmula $\neg Q(f(a, b), c) \rightarrow \forall x Q(a, g(x)) \wedge P(f(g(b), x))$.

e) Llamemos D al dominio de 5 elementos y P al símbolo de predicado de aridad 3. Una interpretación de P consiste en un subconjunto de $D \times D \times$

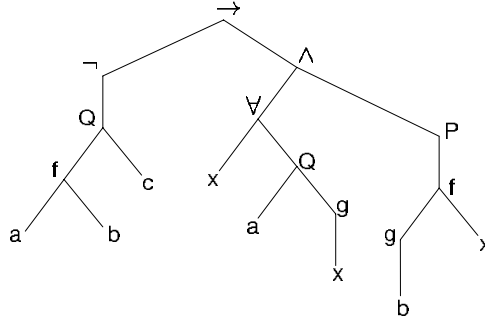


Figura 11.12: Árbol estructural de $\neg Q(f(a,b),c) \rightarrow \forall x Q(a,g(x)) \wedge P(f(g(b),x))$ del ejercicio 1d.

D , que consta de $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$ elementos. Por tanto, el número de interpretaciones distintas para P coincide con el número de subconjuntos distintos que tiene un conjunto de 125 elementos, es decir 2^{125} interpretaciones.

f) El razonamiento no es correcto. Para demostrarlo vamos a construir una interpretación $\mathbb{I} = (D, I)$ que haga cierta la fórmula de la izquierda y falsa la fórmula de la derecha. Tomamos, por ejemplo, $D = \{a, b\}$ y $P^I = \{(a, b), (b, a)\}$. La fórmula de la izquierda es cierta, ya que $P(a, b)^I = 1$. Sin embargo, la fórmula de la derecha es falsa, ya que tanto $P(a, a)^I = 0$ como $P(b, b)^I = 0$.

Ejercicio 2: (16 puntos) En el contexto de la lógica proposicional, clasifica la siguiente fórmula por medio de tableaux semánticos acabados:

$$(p \vee q \rightarrow r) \wedge t \wedge (p \rightarrow \neg s) \rightarrow q \wedge \neg t.$$

Solución:

$$\varphi = (p \vee q \rightarrow r) \wedge t \wedge (p \rightarrow \neg s) \rightarrow q \wedge \neg t \equiv \neg((\neg(p \vee q) \vee r) \wedge t \wedge (\neg p \vee \neg s)) \vee (q \wedge \neg t) \equiv$$

$$\equiv ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee \neg t \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge \neg t).$$

$$\neg \varphi \equiv ((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \wedge t \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge (\neg q \vee t).$$

La figura 11.13 representa los tableaux de $\neg \varphi$ y φ .

Ya que el tableau acabado de $\neg \varphi$ tiene ramas abiertas, la fórmula φ no es una tautología. El tableau acabado de φ también contiene ramas abiertas. Por tanto φ es una contingencia.

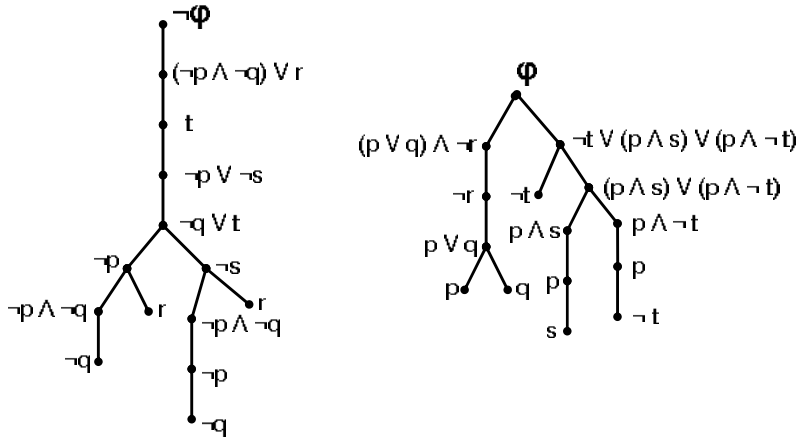


Figura 11.13: Tableaux de $\neg\varphi$ y φ del ejercicio 2.

Ejercicio 3: (20 puntos) En el contexto de la lógica proposicional y usando el sistema de deducción natural de Gentzen, demuestra la validez de la deducción:

$$\{s \rightarrow (r \rightarrow t), p \vee s, \neg(r \rightarrow p)\} \vdash t.$$

Solución:

- 1) $s \rightarrow (r \rightarrow t)$ (Premisa)
- 2) $p \vee s$ (Premisa)
- 3) $\vdash \neg(r \rightarrow p)$ (Premisa)
- 4) $\vdash \neg(\neg r \vee p)$ (Interdefinición 2 (3))
- 5) $\vdash \neg\neg r \wedge \neg p$ (De Morgan (4))
- 6) $\vdash r \wedge \neg p$ ($E\neg$ (5))
- 7) $\vdash r$ ($E\wedge$ (6))
- 8) $\vdash \neg p$ ($E\wedge$ (6))
- 9) $\vdash s$ (TP (8,2))
- 10) $\vdash r \rightarrow t$ ($E\rightarrow$ (9,1))
- 11) $\vdash t$ ($E\rightarrow$ (7,10))

Ejercicio 4: Usa el principio de recursión estructural para definir las siguientes funciones:

a) (6 puntos) La función $lt : T \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada término $t \in T$ de la lógica de primer orden le asocia su **longitud**, entendida como el número de caracteres que aparecen en ese término, **excluyendo** paréntesis y comas.

b) (10 puntos) La función $lf : F \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada fórmula $\varphi \in F$ de la lógica de primer orden le asocia su **longitud**, entendida como el número

de caracteres que aparecen en ese término, **excluyendo** paréntesis y comas (apóyate en la función lt del apartado anterior).

Nota: Se considerará que todos los símbolos de variable, constante, función y predicado constan de un único carácter.

Solución:

a) Definimos la función lt por recursión:

Para términos atómicos:

- $lt(c) = 1$, donde c es un símbolo de constante.
- $lt(x) = 1$, donde x es un símbolo de variable.

Paso recursivo:

- $lt(f(t_1, t_2, \dots, t_n)) = lt(t_1) + lt(t_2) + \dots + lt(t_n) + 1$,
donde f es un símbolo de función de aridad n y $t_1, t_2, \dots, t_n$ son términos.

b) Definimos la función lf por recursión apoyándonos en la función lt del apartado anterior:

Para fórmulas atómicas:

- $lf(\top) = lf(\perp) = 1$.
- $lf(p) = 1$, donde p es un símbolo de proposición atómica.
- $lf(t_1 = t_2) = lt(t_1) + lt(t_2) + 1$, donde t_1 y t_2 son términos.
- $lf(P(t_1, t_2, \dots, t_n)) = lt(t_1) + lt(t_2) + \dots + lt(t_n) + 1$,
donde P es un símbolo de predicado de aridad n y $t_1, t_2, \dots, t_n$ son términos.

Paso recursivo:

- $lf(\neg\varphi) = lf(\varphi) + 1$.
- $lf(\varphi \circ \psi) = lf(\varphi) + lf(\psi) + 1$.
- $lf(\forall x\varphi) = lf(\exists x\varphi) = lf(\varphi) + 2$,

donde φ y ψ son fórmulas, $\circ$ es una conectiva binaria y x es un símbolo de variable.

Ejercicio 5: (12 puntos, 2 por apartado) Formaliza en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados escritos en lenguaje natural. El dominio para todos ellos es $\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales. En

cada caso indica cuáles son los símbolos de función y predicado (incluidas constantes y proposiciones atómicas) que estás usando.

- a) Los números naturales son pares o impares, pero no las dos cosas a la vez.
- b) Si un número es par, entonces su siguiente es impar.
- c) Ningún número es igual a su siguiente.
- d) El producto de un número y su siguiente es siempre par.
- e) Todo número es menor que su siguiente.
- f) Dado un número cualquiera distinto de uno siempre hay otro número menor.

Solución:

Usaremos los siguientes símbolos de predicado:

- $P(x)$: x es par.
- $I(x)$: x es impar.
- $M(x, y)$: x es menor que y .

Símbolos de función:

- $s(x)$: el siguiente de x .
- $p(x, y)$: el producto de x e y .

Símbolo de constante:

- u : el número 1.

Una de las posibles formalizaciones correctas es:

- a) $\forall x \left((P(x) \vee I(x)) \wedge \neg(P(x) \wedge I(x)) \right)$
- b) $\forall x (P(x) \longrightarrow I(s(x)))$
- c) $\neg \exists x (x = s(x))$
- d) $\forall x (P(p(x, s(x))))$
- e) $\forall x (M(x, s(x)))$

$$f) \forall x (\neg(x = u) \longrightarrow \exists y M(y, x))$$

Ejercicio 6: Se considera la siguiente lista ordenada de caracteres

AABADCCDADABBAC

y la interpretación (Dom, I) cuyo dominio es $Dom = \{A, B, C, D\}$ y en la cual se tienen los siguientes símbolos de predicado:

$P(x)$: x aparece en la lista dos o más veces consecutivas.

$Q(x, y)$: x aparece en la lista inmediatamente antes de y .

$R(x, y, z)$: y aparece en la lista inmediatamente antes de z e inmediatamente después de x .

Se considera también la función f de aridad 1 que intercambia A con B e intercambia C con D .

a) (6 puntos) Escribe explícitamente los conjuntos P^I y Q^I .

b) (18 puntos, 3 por fórmula) En la interpretación dada, evalúa las siguientes fórmulas. Justifica tus respuestas:

$$\varphi_1 : \forall x (P(f(x)) \rightarrow Q(x, x))$$

$$\varphi_2 : \exists x R(x, f(x), f(x))$$

$$\varphi_3 : \exists x \exists y (Q(x, x) \rightarrow R(y, y, y))$$

$$\varphi_4 : \forall x P(x) \vee \forall x \neg P(x)$$

$$\varphi_5 : \forall x \neg \forall y \neg R(x, y, x)$$

$$\varphi_6 : \exists x \forall y Q(x, y)$$

Solución:

a)

$$P^I = \{A, B, C\}$$

$$Q^I = \{(A, A), (A, B), (A, C), (A, D), (B, A), (B, B), (C, C), (C, D), (D, A), (D, C)\}$$

b)

- $\varphi_1^I = 0$, ya que tomando $x = D$ se tiene

$P(f(D))^I = P(C)^I$	$Q(D, D)^I$	$(P(f(D)) \rightarrow Q(D, D))^I$
1	0	0

y, por tanto, la fórmula que empieza con el $\forall$ es falsa.

- $\varphi_2^I = 1$, porque tomando $x = A$ se tiene

$$R(A, f(A), f(A))^I = R(A, B, B)^I = 1$$

por lo cual la fórmula que empieza con el $\exists$ es cierta.

- $\varphi_3^I = 1$, porque tomando $x = D$ y, por ejemplo, $y = A$, se tiene

$Q(D, D)^I$	$R(A, A, A)^I$	$(Q(D, D) \rightarrow R(A, A, A))^I$
0	0	1

así que la formula que empieza con el doble $\exists$ es cierta.

- $\varphi_4^I = 0$, ya que

$P(D)^I$	$(\forall x P(x))^I$	$\neg P(A)^I$	$(\forall x \neg P(x))^I$	$(\forall x P(x) \vee \forall x \neg P(x))^I$
0	0	0	0	0

- $\varphi_5^I = 0$. Por las equivalencias lógicas estudiadas se tiene

$$\varphi_5 \equiv \forall x \exists y R(x, y, x)$$

Para la asignación $x = B$ se tiene que la fórmula $\exists y R(B, y, B)$ es falsa, ya que en ningún momento en la secuencia de caracteres aparece la subsecuencia ByB para ninguno de los valores posibles de y . Por tanto, la fórmula que empieza con el $\forall$, equivalente a φ_5 , es falsa.

- $\varphi_6^I = 1$. Si tomamos $x = A$ observamos que la fórmula $\forall y Q(A, y)$ es cierta, ya que las cuatro subsecuencias AA, AB, AC, AD aparecen dentro de la secuencia de caracteres. Así pues, la fórmula que empieza con el $\exists$ es cierta.

Apéndice A

El sistema de Kleene

El sistema de demostración axiomático de Stephen Cole Kleene (*Introduction to Metamathematics*, 1952) es un sistema directo cuya origen es el sistema de David Hilbert (1899).

A.1 El sistema de Kleene para la lógica proposicional

La definición del sistema de Kleene para la lógica proposicional es la siguiente, donde usaremos la forma abreviada para las fórmulas proposicionales.

Definición A.1.1 *El sistema de demostración de Kleene es el sistema axiomático*

$$\mathbf{K} = (A, F, X, R)$$

definido por:

A : el alfabeto está compuesto por

- los símbolos $p, q, r, s, t, \dots$ de proposiciones atómicas,
- los símbolos de conectivos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$,
- los símbolos de paréntesis $(,)$.

F : el conjunto de las fórmulas bien construidas (fbc) se define recursivamente como

At : toda proposición atómica es una fbc,

$\neg$: Si φ es una fbc entonces $\neg\varphi$ es una fbc,

$\circ$: si φ y ψ son dos fbc, entonces

$$\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \varphi$$

son fbc.

Toda fbc se obtiene mediante las tres reglas anteriores.

NOTA: En lo que se sigue usaremos también el conectivo de coimplicación entre dos fórmulas, $\varphi \leftrightarrow \psi$. Este conectivo se entenderá como una forma abreviada de representar la fórmula bien construida $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

X : el conjunto de los axiomas es

$$A1 : \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$A2 : \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$A3 : \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi)$$

$$A4 : \vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \quad \vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$$

$$A5 : \vdash \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi \quad \vdash \psi \rightarrow \varphi \vee \psi$$

$$A6 : \vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi))$$

$$A7 : \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$$

$$A8 : \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$$

R : la única regla de este sistema es la modus ponens:

$$MP: \frac{\vdash \varphi \quad \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\vdash \psi}$$

Interpretación de los axiomas

Ahora, usando el teorema de la deducción, podemos volver a interpretar los axiomas del sistema de Kleene siguiendo la tabla A.1:

$$A1 : \varphi \vdash (\psi \rightarrow \varphi)$$

De una fórmula φ se puede deducir cualquier implicación donde φ sea la conclusión.

Así, por ejemplo, sean $\varphi =$ llueve y $\psi = x$ es par.

De “llueve” se deduce que “ x es par implica que llueve.”

$$A2 : \{(\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))\} \vdash (\varphi \rightarrow \chi)$$

La implicación $(\varphi \rightarrow \chi)$ se puede deducir si su premisa φ implica los elementos de un modus ponens con conclusión χ .

Así, por ejemplo, sean $\varphi =$ llueve, $\psi = x$ es par y $\chi =$ la pared es blanca.

“Si llueve la pared es blanca” se deduce de “si llueve x es par” y “si llueve entonces si x es par la pared es blanca.”

$$A3 : \{\varphi, \psi\} \vdash (\varphi \wedge \psi)$$

De dos fórmulas se deduce su conjunción.

[A1]	$\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	$\varphi \vdash (\psi \rightarrow \varphi)$
[A2]	$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$	$\{(\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))\} \vdash (\varphi \rightarrow \chi)$
[A3]	$\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi)$	$\{\varphi, \psi\} \vdash (\varphi \wedge \psi)$
[A4]	$\vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \quad \vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$	$(\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi \quad (\varphi \wedge \psi) \vdash \psi$
[A5]	$\vdash \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi \quad \vdash \psi \rightarrow \varphi \vee \psi$	$\varphi \vdash (\varphi \vee \psi) \quad \psi \vdash (\varphi \vee \psi)$
[A6]	$\vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi))$	$\{(\varphi \rightarrow \chi), (\psi \rightarrow \chi), \varphi \vee \psi\} \vdash \chi$
[A7]	$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$	$\{(\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \neg\varphi$
[A8]	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	$\neg\neg\varphi \vdash \varphi$

Tabla A.1: Interpretación de los axiomas del sistema de Kleene

A4 : $(\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi \quad (\varphi \wedge \psi) \vdash \psi$

De una conjunción de dos fórmulas se deducen las dos fórmulas.

A5 : $\varphi \vdash (\varphi \vee \psi) \quad \psi \vdash (\varphi \vee \psi)$

La disyunción de dos fórmulas se puede deducir de cada una de ellas.

A6 : $\{(\varphi \rightarrow \chi), (\psi \rightarrow \chi), \varphi \vee \psi\} \vdash \chi$

La conclusión de dos implicaciones se deduce de las dos implicaciones y de la disyunción de sus premisas.

Usando la notación de los ejemplos anteriores, de “si llueve la pared es blanca” y “si x es par la pared es blanca” y “o llueve o x es par” se deduce que “la pared es blanca.”

A7 : $\{(\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \neg\varphi$

De dos implicaciones con igual premisa y conclusiones una la negación de la otra se deduce la negación de la premisa.

En el caso de nuestro ejemplo, de “si llueve, x es par” y “si llueve, x no es par” se deduce que “no llueve.”

A8 : $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$

Toda fórmula se deduce de su doble negación.

Demostración de teoremas en el sistema de Kleene

Vamos ahora a escribir una larga lista de teoremas que es posible demostrar en el contexto del sistema axiomático de Kleene.

Presentaremos sólo algunas de las demostraciones de estos teoremas, las demás se pueden encontrar en el párrafo 3.1.2 de [A].

Es importante observar que todos estos resultados son consecuencia solamente de ocho axiomas y de una única regla de inferencia.

- **T1: Teorema de la identidad**

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

De toda fórmula se deduce ella misma.

- **T2: Regla del silogismo**

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

De dos implicaciones ($\varphi \rightarrow \psi$ y $\psi \rightarrow \chi$) tales que la conclusión de la primera es la premisa de la segunda se deduce la implicación de la premisa de la primera fórmula a la conclusión de la segunda.

Este teorema se puede pensar como una propiedad transitiva: de “todos los hombres son animales” y “todos los animales son mortales” se deduce que “todos los hombres son mortales.”

- **T3: Modus ponens**

$$\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$$

De una implicación y de su premisa se deduce su conclusión.

Por ejemplo, de “Juan es un hombre” y “si Juan es un hombre entonces es mortal” se deduce que “Juan es mortal.”

- **T4: Excontradictione Quodlibet**

$$\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$$

De una fórmula y de su negación se deduce cualquier fórmula.

De “Juan es un hombre” y “Juan no es un hombre” se deduce que “la pared es blanca.”

- **T5: Producto condicional**

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi))$$

De dos implicaciones con la misma premisa se deduce la implicación de esa premisa a la conjunción de sus conclusiones.

Por ejemplo, de “si x es par, es divisible por dos” y “si x es par, no es impar” se deduce que “si x es par, entonces x es divisible por dos y no es impar.”

- **T6: Contraposición**

$$T6.1) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$$

$$T6.2) \vdash (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\varphi)$$

$$T6.3) \vdash (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi)$$

De una implicación se deduce su contrapositiva.

Por ejemplo,

T6.1) de “llevo paraguas sólo si llueve” se deduce que “si no llueve no llevo paraguas,”

T6.2) de “llevo paraguas sólo si no hace sol” se deduce que “si hace sol no llevo paraguas.”

T6.3) de “no llevo paraguas sólo si hace sol” se deduce que “si no hace sol llevo paraguas.”

- **T7: Interdefinición 1**

$$T7.1) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$$

De una implicación se deduce la negación de la conjunción de su premisa con la negación de su conclusión.

$$T7.2) \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

Es el recíproco del anterior: una implicación se deduce de la negación de la conjunción de su premisa con la negación de su conclusión.

Por ejemplo,

T7.1) de “llevo paraguas sólo si llueve” se deduce que “no es posible que lleve paraguas y no llueva,”

T7.2) de “no es posible que lleve paraguas y no llueva” se deduce que “llevo paraguas sólo si llueve.”

- **T8: Leyes de de Morgan**

$$T8.1) \vdash \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

De la negación de la disyunción de dos fórmulas se deduce la conjunción de las negaciones de las mismas.

$$T8.2) \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$$

Es la recíproca del anterior: de la conjunción de las negaciones de dos fórmulas se deduce la negación de la disyunción de las mismas.

Por ejemplo,

T8.1) de “no es posible que x sea un elemento de A o sea un elemento de B ” se deduce que “ x no es elemento de A y x no es elemento de B ,”

T8.2) de “ x no es elemento de A y x no es elemento de B ” se deduce que “no es posible que x sea un elemento de A o sea un elemento de B .”

$$\text{T8.3)} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$

De la negación de la conjunción de dos fórmulas se deduce la disyunción de las negaciones de las mismas.

$$\text{T8.4)} \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$$

Es la recíproca del anterior: de la disyunción de las negaciones de dos fórmulas se deduce la negación de la conjunción de las mismas.

Por ejemplo,

T8.3) de “no es posible que x sea un elemento de A y de B ” se deduce que “ x no es elemento de A o x no es elemento de B ,”

T8.4) de “ x no es elemento de A o x no es elemento de B ” se deduce que “no es posible que x sea un elemento de A y de B .”

- **T9: Interdefinición 2**

$$\text{T9.1)} \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$$

De una implicación se deduce la disyunción de la negación de su premisa con su conclusión.

$$\text{T9.2)} \vdash (\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

Es la recíproca de la anterior: una implicación se deduce de la disyunción de la negación de su premisa con su conclusión.

Por ejemplo,

T9.1) de “una función derivable es continua” se deduce que “una función no es derivable o es continua,”

T9.2) de “una función no es derivable o es continua” se deduce que “una función derivable es continua.”

Teoremas del conectivo conjunción

- **T10: Propiedad conmutativa**

$$\text{T10.1)} \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$$

$$\text{T10.2)} \vdash (\psi \wedge \varphi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$$

- **T11: Propiedad asociativa**

$$\text{T11.1)} \vdash \varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$$

$$\text{T11.2)} \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \rightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$$

- **T12: Propiedad distributiva**

$$\text{T12.1)} \vdash \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$

$$\text{T12.2)} \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \rightarrow \varphi \wedge (\psi \vee \chi)$$

- **T13: Propiedad de absorción**

$$\text{T13.1)} \vdash \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \rightarrow \varphi$$

De la conjunción de una fórmula φ con su disyunción con cualquier otra fórmula se deduce φ .

$$\text{T13.2)} \vdash \varphi \rightarrow \varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$$

Es la recíproca del anterior: de una fórmula φ se deduce la conjunción de ella con su disyunción con cualquier otra fórmula.

Por ejemplo,

T13.1) de “x es un elemento de A y x es un elemento de A o de B” se deduce que “x es un elemento de A.”

T13.2) de “x es un elemento de A” se deduce que “x es un elemento de A y x es un elemento de A o de B.”

Demostración de T13.1:

Aplicando el teorema de la deducción, tenemos que verificar que

$$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \vdash \varphi$$

- 1) $\varphi_1 : \quad \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \quad (\text{Premisa})$
- 2) $\vdash \varphi_2 : \quad \vdash \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \rightarrow \varphi \quad (\text{A4})$
- 3) $\vdash \varphi_3 : \quad \vdash \varphi \quad \text{MP}(1,2)$

- **T14: Idempotencia**

$$\text{T14.1)} \vdash \varphi \wedge \varphi \rightarrow \varphi$$

$$\text{T14.2)} \vdash \varphi \rightarrow \varphi \wedge \varphi$$

La demostración de este teorema se propone como ejercicio.

Teoremas del conectivo disyunción

- **T15: Propiedad conmutativa**

$$T15.1) \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \varphi)$$

$$T15.2) \vdash (\psi \vee \varphi) \rightarrow (\varphi \vee \psi)$$

- **T16: Propiedad asociativa**

$$T16.1) \vdash \varphi \vee (\psi \vee \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \chi$$

$$T17.2) \vdash (\varphi \vee \psi) \vee \chi \rightarrow \varphi \vee (\psi \vee \chi)$$

- **T17: Propiedad distributiva**

$$T17.1) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

$$T17.2) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \rightarrow \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$$

- **T18: Propiedad de absorción**

$$T18.1) \vdash \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$$

De la disyunción de una fórmula φ con su conjunción con cualquier otra fórmula se deduce φ .

$$T18.2) \vdash \varphi \rightarrow \varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$$

Es la recíproca del anterior: de una fórmula φ se deduce la disyunción de ella con su conjunción con cualquier otra fórmula.

Por ejemplo,

T18.1) de “x es un elemento de A o x es un elemento de A y de B” se deduce que “x es un elemento de A,”

T18.2) de “x es un elemento de A” se deduce que “x es un elemento de A o x es un elemento de A y de B.”

- **T19: Idempotencia**

$$T19.1) \vdash \varphi \vee \varphi \rightarrow \varphi$$

$$T19.2) \vdash \varphi \rightarrow \varphi \vee \varphi$$

Teoremas del conectivo coimplicación

- **T20: Introducción de la coimplicación**

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi))$$

La coimplicación (doble implicación) entre dos fórmulas se deduce de las dos implicaciones que tienen estas dos fórmulas como premisa y conclusión y como conclusión y premisa, respectivamente.

La demostración de este teorema se propone como ejercicio.

- **T21: Eliminación de la coimplicación**

$$\text{T21.1)} \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\text{T21.2)} \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

De una coimplicación entre dos fórmulas se deducen las implicaciones de cada una a la otra.

La demostración de este teorema se propone como ejercicio.

- **T22: Propiedad reflexiva**

$$\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$$

Toda fórmula coimplica a sí misma.

- **T23: Propiedad transitiva**

$$\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \leftrightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \chi))$$

Si una fórmula φ coimplica a una fórmula ψ se deduce que si ψ coimplica a una fórmula χ entonces φ coimplica a χ .

- **T24: Propiedad simétrica**

$$\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi)$$

De φ coimplica a ψ se deduce que ψ coimplica a φ .

Teoremas del conectivo implicación

- **T25: Importación-Exportación**

$$\text{T25.1)} \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi)$$

De una implicación cuya conclusión es una implicación $\psi \rightarrow \chi$ se deduce la implicación de la conjunción de las dos premisas a la conclusión χ .

$$\text{T25.2)} \vdash (\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$$

Es la recíproca del anterior: de una implicación cuya premisa es la conjunción de dos fórmulas se deduce la implicación de una de las dos premisas a la implicación de la otra premisa a la conclusión.

Por ejemplo, sean

$p =$ n es un número natural,

$q =$ n es par,

$r =$ el cuadrado de n es par.

Entonces,

T25.1) de “si n es número natural, entonces si n es par su cuadrado es par” se deduce que “si n es un número natural y es par, entonces su cuadrado es par,”

T25.2) de “si n es un número natural y es par, entonces su cuadrado es par” se deduce que “si n es número natural, entonces si n es par su cuadrado es par.”

Demostración de T25.1:

Por el teorema de la deducción, tenemos que verificar que

$$\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \chi.$$

- 1) $\varphi_1 : \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ (Premisa)
- 2) $\varphi_2 : \quad \varphi \wedge \psi$ (Premisa)
- 3) $\vdash \varphi_3 : \vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$ (A4)
- 4) $\vdash \varphi_4 : \vdash \varphi$ MP(2,3)
- 5) $\vdash \varphi_5 : \vdash \psi \rightarrow \chi$ MP(4,1)
- 6) $\vdash \varphi_6 : \vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$ (A4)
- 7) $\vdash \varphi_7 : \vdash \psi$ MP(2,6)
- 8) $\vdash \varphi_8 : \vdash \chi$ MP(7,5)

A.2 El sistema de Kleene para la lógica de primer orden

La definición del sistema de Kleene para la lógica de predicados es una extensión de su definición en el contexto de la lógica proposicional, donde se añaden axiomas y reglas de inferencia relativas a los cuantificadores.

Definición A.2.1 *El sistema de demostración de Kleene es el sistema axiomático*

$$\mathbf{K} = (A, F, X, R)$$

definido por:

A : el alfabeto de la lógica de primer orden.

F : el conjunto de las fórmulas de la lógica de primer orden.

X : el conjunto de los axiomas es

$$A1 : \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$A2 : \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$A3 : \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi)$$

$$A4 : \vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \quad \vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$$

$$A5 : \vdash \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi \quad \vdash \psi \rightarrow \varphi \vee \psi$$

$$A6 : \vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi))$$

$$A7 : \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$$

$$A8 : \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$$

$$A9 : \vdash \forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(t)$$

$$A10 : \vdash \varphi(t) \rightarrow \exists x\varphi(x),$$

donde t representa un término cualquiera, constante o variable libre.

$R :$

– **Modus ponens:**

$$MP: \frac{\vdash \varphi \quad \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\vdash \psi}$$

– **Generalización universal condicional** (y no aparece libre en φ y aparece libre en ψ):

$$\frac{\vdash \varphi \rightarrow \psi(y)}{\vdash \varphi \rightarrow \forall x\psi(x)}$$

– **Generalización existencial condicional** (y aparece libre en φ y no aparece libre en ψ):

$$\frac{\vdash \varphi(y) \rightarrow \psi}{\vdash \exists x\varphi(x) \rightarrow \psi}$$

Bibliografía

- [A] L. Arenas, *Lógica formal para informáticos*. Ed. Diaz de Santos, 1996.
- [AFJM] J. Aranda, J.L. Fernández, J. Jiménez, F. Morilla, *Fundamentos de Lógica Matemática*. Ed. Sanz y Torres, 1999.
- [BA] M. Ben-Ari, *Mathematical Logic for Computer Science*. Springer-Verlag London Limited, 2001.
- [C] J. Cuenca, *Lógica matemática*. Alianza Editorial, 1985.
- [CBVB] R. Criado, A. Burjosa, C. Vegas, R. Banerjee, *Fundamentos matemáticos I*, Ed. Centro de estudios Ramón Areces. Madrid, 1998
- [CM] R. Criado, R. Muñoz, *Apuntes de Matemática Discreta*, www.escet.urjc.es/matemati/md_iti/apuntes/md00.pdf.
- [F] M. Fitting, *First-order logic and automated theorem proving*. Springer Graduate Texts in Computer Science. Berlín, 1996.
- [H] P.H. Halmos, *Naive Set Theory*, Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1987.
- [HLR] M. A. Hortalá, J. Leach, M. Rodríguez. *Matemática Discreta y Lógica Matemática*. Editorial Complutense, 2001.
- [MH] M. Manzano, A. Huertas, *Lógica para Principiantes*. Alianza Editorial, 2004.
- [R] K. H. Rosen. *Matemática discreta y sus aplicaciones*. McGraw Hill, 2004.
- [UNED1] <http://wainu.ii.uned.es:8081/WAINU/ingenierias-tecnicas/primer/LoMa>.

